# La integral de Henstock-Kurzweil y el Teorema Fundamental del Cálculo

Adriana Ocejo Monge

27 de Febrero del 2008

# Índice general

# *Agradecimientos*

*A Dios, quien es mi amigo incondicional y el sentido por el cual vivo.*

*A mis padres, Adriana Monge Valencia y Humberto Ocejo Montaño, quienes me han enseñado que el amor, la dedicación y la sencillez son los valores claves para avanzar.*

*A mis hermanos Beto y Gaby, y a mi prima Minerva, quienes han aguantado con cariño mis jornadas de estudio.*

*A mi familia en general, quienes me han acosejado y cuidado, es un orgullo pertenecer a ella.*

*A mis amigos, quienes con su entusiasmo y comprensión me impulsan día a día para no flaquear, que me quieren como soy. Se que se dan por aludidos.*

*A todos mis maestros, quienes con responsabilidad han asumido su papel y transmitido con ánimo su conocimiento.*

*A mi asesor de tesis Dr. Agustín Brau por mostrarme su ejemplo, paciencia y calidad profesional; a mi tutora Dra. Guadalupe Avila por su apoyo incondicional e invaluables consejos; a Dr. Oscar Vega y Dr. Adolfo Minjares por motivarme siempre y apoyarme. A todos, gracias también por sus acertados comentarios y correcciones realizados a este trabajo.*

*Al Cuerpo Académico "Modelado, Estimación y Control de Sistemas Estocásticos" por el apoyo brindado para la realización en el marco del proyecto "Seminario de Fundamentos y Aplicaciones de Probabilidad y Procesos Estocásticos".*

# Introducción

En este trabajo se presenta la teoría de integración recientemente desarrollada por Henstock y Kurzweil alrededor de 1960. La integral de Hentock-Kurzweil (por brevedad HK-integral, también conocida como *integral generalizada de Riemann*) posee una característica deseable en cualquier teoría de integración: es una integral potente como la de Lebesgue que preserva la sencillez de la definición de Riemann. El objetivo de la tesis es la exposición de los principales resultados de la HK-integral para funciones reales definidas sobre intervalos cerrados.

A mediados del siglo XVII, Newton concibe un concepto de integral cuyo significado es simplemente el proceso inverso de la derivada. La definición descriptiva de la integral de Newton es muy natural: una función es Newton integrable si tiene una antiderivada. Tiempo después, Cauchy define una integral de manera constructiva restringiéndose a la clase de las funciones continuas. Esta integral coincide con la integral de Newton, sin embargo, debido a la existencia de derivadas no acotadas la de Newton permanece más general.

Poco tiempo después, Riemann redefine la integral de Cauchy permitiendo la integración de algunas funciones discontinuas. La integral de Riemann se caracteriza por su facilidad de manejo y por la sencillez al probar teoremas básicos, sin embargo, es conocido que posee muchas limitaciones. La restricción más inmediata es que una función Riemann integrable debe ser acotada. Por otro lado, la formulación “incompleta”que tiene el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) con la integral de Riemann, como proceso inverso al proceso de derivación, es otra de las desventajas importantes de esta integral.

Por su parte, Lebesgue da un revolucionario enfoque a la teoría de integración existente al presentar su tesis doctoral en 1902, superando las limitaciones de la integral de Riemann en cuanto a los teoremas de convergencia.

Actualmente, la integral de Lebesgue es la más popular y aceptada por la comunidad científica por la eficiencia de sus teoremas de convergencia y la gran generalidad de la clase de funciones Lebesgue integrables. Aún así, una limitación central prevalece ya que también existen funciones $F$ derivables en todo punto (necesariamente no acotadas), cuya derivada $F'$ no es Lebesgue integrable.

Ofreciendo una respuesta más satisfactoria en cuanto al TFC, Denjoy y Perron definen una integral que permite recuperar a una función a partir de su derivada. El problema con su integral es que la definición es muy complicada. Años más tarde, Ralph Henstock y Jaroslav Kurzweil formulan la HK-integral que resulta ser equivalente a la integral de Denjoy y Perron. La motivación principal de la definición de la HK-integral es dar una forma más general al Teorema Fundamental del Cálculo, es decir, obtener una integral que retome la idea original de Newton.

A través de la exposición del tema daremos respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Podemos aprovechar la simplicidad del esquema de Riemann para obtener una integral más potente?
- ¿Es posible formular una integral tipo Riemann que permita recuperar una función $f$ a partir de su derivada sin imponer condición alguna sobre $f'$?

La respuesta a estas dos interrogantes es *sí*. De hecho, se logra todo esto modificando la definición dada por Riemann en un aspecto muy sencillo pero de un significativo impacto: permitiendo que la $\delta > 0$ que acota la longitud de las particiones del intervalo $[a, b]$ no sea una constante, sino una función $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$. Dicha función positiva es conocida como *gauge*. Es claro que obtenemos una clase más amplia de funciones integrables, pero lo interesante es que esta clase generaliza aún a la clase de las Lebesgue integrables. En este trabajo abordamos una definición equivalente que usa *relaciones de* *cobertura* ya que, como lo ilustra Thomson ([12]), esta herramienta es útil también para resolver otros problemas del análisis.

En el Capítulo 1 empezamos con una breve introducción de la integral de Riemann, proporcionando un panorama general de los principales resultados y algunos ejemplos que usaremos frecuentemente. Enseguida presentamos un procedimiento en el cual aprovechamos la propiedad de diferenciabilidad de una función para aproximar su variación en subintervalos con sumas de Riemann. Dicho procedimiento motiva la definición de la HK-integral. Para formalizar el método descrito definimos *cubiertas de Cousin* y para justificar su validez usaremos el *Lema de Cousin*, el cual asegura la existencia de particiones que cumplen cierta propiedad sobre el intervalo de integración.

Posteriormente, revisamos cómo esta nueva definición permite integrar un mayor número de funciones a través de una sección dedicada a ejemplos. En particular, en esta sección probamos que si $g = f$ excepto en un conjunto numerable entonces $f$ es HK-integrable si y sólo si $g$ lo es. En capítulos posteriores vemos que incluso dos funciones pueden diferir en un conjunto de medida cero y sus integrales siguen siendo iguales siempre que alguna de ellas sea HK-integrable. Este hecho será de mucha utilidad en la prueba de los teoremas relacionados al TFC en su versión general.

Los principales resultados que se exponen en el Capítulo 1 son las propiedades básicas de la integral tales como linealidad, positividad, monotonía, aditividad con respecto al intervalo de integración, entre otras. Veremos que la HK-integral, a diferencia de la integral de Lebesgue, no es una integral absoluta, es decir, si $f$ es HK integrable no necesariamente se sigue que $|f|$ lo es.

Concluimos el primer capítulo dando una primera versión del Teorema Fundamental del Cálculo, que se puede resumir como sigue:

- Si $F$ es una antiderivada de $f$ entonces $f$ es HK-integrable y
$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$
- Si $f$ es HK-integrable y $F$ es una integral indefinida de $f$, entonces $F' = f$ en los puntos donde $f$ es continua.

El Capítulo 2 tiene por objeto el estudio del Lema de Henstock y una subclase de funciones HK-integrables que llamaremos *absolutamente integrables.* Iniciamos estableciendo el Lema de Henstock y algunas aplicaciones sencillas como la prueba de que una integral indefinida es continua. Este lema también nos permitirá probar muchos de los resultados más interesantes en este trabajo, tales como el Teorema de Convergencia Monótona y una parte del Teorema Fundamental del Cálculo.

Después del Lema de Henstock mostramos algunas consecuencias de que la HK-integral no es una integral absoluta y desarrollamos los resultados necesarios para caracterizar a la clase de las funciones absolutamente integrables. Por el papel central que juegan para los resultados mencionados, incluimos una breve presentación de los conceptos de variación acotada y continuidad absoluta, con los que el lector que haya estudiado la integral de Lebesgue está familiarizado.

El Capítulo 3 lo dedicamos a los teoremas de convergencia para la integral de Henstock-Kurzweil, es decir, los teoremas en los que se establecen condiciones para que una sucesión $\{f_n\}$ de funciones HK-integrables convergente satisfaga lo siguiente:
$$\int_I \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Veremos que esas condiciones son esencialmente las que se piden en las versiones correspondientes de estos teoremas en la teoría de Lebesgue.

En el último capítulo discutimos la versión más general del Teorema Fundamental del Cálculo en el marco de la HK-integral, pero enfatizando los aspectos que clarifican su eficiencia sobre las otras teorías de integración. Daremos algunos ejemplos para mostrar que esta forma más general no se verifica para la integral de Lebesgue.

Finalmente, damos una caracterización de la integral de Henstock y Kurzweil con condiciones necesarias y suficientes para que una función $F$ sea una integral indefinida de una función $f$. Para ello, necesitamos una nueva propiedad que llamamos *variación casi nula*. Resulta que las funciones absolutamente continuas sobre un intervalo $[a, b]$ son de variación casi nula sobre cualquier subconjunto nulo contenido en $[a, b]$. De este resultado concluiremos que la HK-integral generaliza a la integral de Lebesgue.

# Capítulo 1

# La integral de Henstock-Kurzweil

En este capítulo presentaremos los conceptos básicos que serán utilizados a lo largo de esta tesis. Revisaremos la formulación de la clásica integral de Riemann y algunos de los resultados más importantes. Así mismo, estudiaremos algunos de los inconvenientes de esta definición de manera que la introducción de la integral de Henstock-Kurzweil (HK) surgirá de manera natural a partir de la corrección de dichas limitaciones, las cuales podemos resumir como sigue:

**a)** Las funciones no acotadas en un intervalo cerrado no son Riemann integrables.

**b)** Hay funciones que tienen primitiva pero que no son Riemann integrables. Esto es, la clase de las funciones que satisfacen la fórmula de Newton-Leibniz

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a), \tag{1.1}$$

no incluye a todas las funciones diferenciables.

**c)** No todas las funciones Riemann integrables tienen primitiva.

Después, abordamos la definición de la integral de Henstock-Kurzweil, más brevemente HK-integral, en el contexto de relaciones de cobertura. La herramienta central en nuestro análisis será el Lema de Cousin, que a pesar de ser una afirmación muy sencilla, veremos que se trata de un resultado sumamente fuerte en cuanto al papel que juega en el desarrollo de la teoría que abarca esta tesis. Adicionalmente, incluimos las principales propiedades de la HK-integral, las cuales parecerán familiares al lector que ha estudiado la integral de Riemann.

## 1.1. La integral de Riemann

Consideremos el intervalo cerrado $I := [a, b]$. Una *partición* de $I$ es una colección finita de subintervalos cerrados $\{I_j\}_{j=1}^n$ tal que $I_j^\circ \cap I_k^\circ = \emptyset$ para $j \neq k$ y cuya unión es $I$. Los intervalos están determinados por sus puntos extremos, de donde podemos denotarlos con $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, donde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{j-1} < x_j < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Si a cada intervalo $I_j$ de la partición se le asigna un punto $t_j \in I_j$, entonces llamamos a $t_j$ una *etiqueta* de $I_j$ y al conjunto $\pi = \{(I_j, t_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$ una *partición etiquetada* de $I$.

Una *subpartición de* $I$ es una colección $\{I_j\}_{j=1}^n$ de subintervalos cerrados no traslapados en $I$. Una *subpartición etiquetada de* $I$ es una colección de pares $\{(I_j, t_j)\}_{j=1}^n$ tal que forma una subpartición de $I$ y $t_j \in I_j$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$.

**Definición 1.1.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ y $\pi = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ una partición etiquetada de $I$. Entonces la **suma de Riemann** $S_\pi(f)$ de $f$ que corresponde a $\pi$ es dada por

$$S_\pi(f) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

La *longitud* de un intervalo $I = [a, b]$ está definida por $\ell(I) = b - a$. Dada una partición $\pi = \{(I_j, t_j)\}_{j=1}^{n}$, a la longitud máxima de los intervalos $I_j$ la llamaremos *norma de la partición* y se denotará por $||\pi||$, es decir,

$$||\pi|| = \max \{\ell(I_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

**Definición 1.2.** Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es **Riemann integrable** sobre $[a, b]$ si existe un número $A \in \mathbb{R}$ que satisface la siguiente condición: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que si $\pi$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ con $||\pi|| < \delta_\epsilon$, entonces

$$|S_\pi(f) - A| < \epsilon.$$

Si $f$ es Riemann integrable decimos que $A$ es la integral de Riemann de $f$. Denotaremos por $\mathcal{R}([a, b])$ a la clase de funciones Riemann integrables sobre $[a, b]$. Es bien conocido que las funciones escalonadas, las monótonas y las continuas definidas sobre un intervalo $[a, b]$, pertenecen a $\mathcal{R}([a, b])$.

A continuación mostramos que una función no acotada no puede ser Riemann integrable.

**Teorema 1.3.** *Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$, entonces $f$ es acotada sobre $[a, b]$.*

*Demostración.* Supongamos que $f$ no es acotada sobre $[a, b]$ y $f \in \mathcal{R}([a, b])$ con integral $A$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\pi$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ con $||\pi|| < \delta$, entonces $|S_\pi(f) - A| < 1$. Luego, tenemos

$$|S_\pi(f)| < |A| + 1.$$

Sea $\pi = \{[x_{i-1}, x_i] : i = 1, 2, \ldots, n\}$ una partición tal que $||\pi|| < \delta$. Ya que $f$ no es acotada sobre $[a, b]$, entonces existe un intervalo $[x_{k-1}, x_k] \in \pi$ donde $f$ no es acotada. Ahora escogemos etiquetas para cada intervalo en $\pi$ como sigue: tomamos $t_i = x_i$ si $i \neq k$ y $t_k$ de manera que

$$|f(t_k)(x_k - x_{k-1})| > |A| + 1 + \left| \sum_{i \neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right|.$$

Por la desigualdad del triángulo (en la forma $|x+y| \geqslant |x| - |y|$) concluimos que

$$|S_\pi(f)| \geqslant |f(t_k)(x_k - x_{k-1})| - \left| \sum_{i \neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| > |A| + 1,$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Una debilidad en la definición de Riemann es que la elección de las etiquetas es arbitraria, sólo es necesario que la partición tenga norma menor que cierta $\delta > 0$. Vemos en la demostración anterior que si la función no es acotada siempre es posible encontrar una etiqueta $t_k$ en un intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ para la cual el término $f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ es arbitrariamente grande, no importando cuál sea la norma de la partición.

**Ejemplo 1.4.** Sea $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para $x \in (0,1]$. Note que $f(x)$ crece arbitrariamente cuando $x \to 0$, así que hacemos $f(0) = 0$. Como $f$ no es acotada en $[0,1]$, entonces $f \notin \mathcal{R}([0,1])$.

El problema con esta función es que no es posible controlar el valor de las sumas de Riemann en el subintervalo extremo izquierdo de cualquier partición etiquetada, ya que dependiendo de la etiqueta que se tome se tendrán valores arbitrariamente grandes de la función siempre que la etiqueta sea distinta de cero.

Si pudiésemos tomar en cuenta el comportamiento de la función para controlar el valor de las sumas de Riemann, esta función sería integrable. Una forma de lograr ésto es que el primer término en $S_\pi(f)$ fuese siempre cero, aprovechando que en el intervalo $[x_1, 1]$ la función es acotada y continua y por tanto más fácil de manejar.

El uso directo de la definición requiere que conozcamos el valor de la integral. El criterio de Cauchy nos permite hacer a un lado esta necesidad. Lo enunciamos a continuación sin demostración (para una prueba ver [3]).

**Teorema 1.5.** *(Criterio de Cauchy)*

*Una función* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pertenece a* $\mathcal{R}([a,b])$ *si y sólo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta_\epsilon > 0$ *tal que si* $\pi_1$ *y* $\pi_1$ *son particiones etiquetadas de* $[a,b]$ *con* $||\pi_1|| < \delta_\epsilon$ *y* $||\pi_2|| < \delta_\epsilon$*, entonces*

$$|S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)| < \epsilon.$$

Uno de los ejemplos más conocidos de una función que no es Riemann integrable es la función de Dirichlet (o función lluvia).

**Ejemplo 1.6.** La función de Dirichlet se define en $[0,1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Intuitivamente y usando la noción de "área bajo la curva"que la integral de Riemann proporciona para funciones no negativas, podemos pensar que la integral de $f$, si ésta existiera, fuera cero. Sin embargo, es bien conocido que la función de Dirichlet no está en $\mathcal{R}([a,b])$, lo cual se prueba fácilmente usando el Criterio de Cauchy:

Tomemos $\epsilon = 1/2$. Si $\pi_1$ es una partición cuyas etiquetas son números racionales entonces $S_{\pi_1}(f) = 1$, mientras que si $\pi_2$ es una partición cuyas etiquetas son números irracionales entonces $S_{\pi_2}(f) = 0$. Dado que es posible tomar tales particiones con normas suficientemente pequeñas, concluimos que la función de Dirichlet no es Riemann integrable ya que

$$|S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)| = 1 > \epsilon.$$

Este ejemplo nos muestra que es una verdadera limitación centrar la definición de integral en refinamientos de particiones sin tomar en cuenta el comportamiento propio de la función, el cual involucra también una elección apropiada de las etiquetas.

Mencionamos al principio del capítulo la existencia de funciones que tienen primitiva pero que no son Riemann integrables. Para ilustrar esto damos una función un poco más compleja, cuya derivada no es Riemann integrable ya que no es acotada.

**Ejemplo 1.7.** Sea $f(x) = x^2 \cos 1/x^2$ para $x \in (0, 1]$ y $f(0) = 0$. Entonces

$$f'(x) = 2x \cos 1/x^2 + \frac{2}{x} \sin 1/x^2 \qquad \text{para } x \in (0, 1].$$

Aplicando la definición de derivada en el punto $x = 0$ tenemos que

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos 1/x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x \cos 1/x^2.$$

Ya que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, para toda $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $-|x| \leqslant x \cos 1/x^2 \leqslant |x|$ y dado que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ entonces $f'(0) = 0$.

Por tanto, $f$ es diferenciable en cada punto de $[0, 1]$. Se puede ver que $f'$ no está acotada en $[0, 1]$, de manera que $f' \notin \mathcal{R}([0, 1])$ y por tanto no satisface la fórmula de Newton-Leibniz.

Comentamos también que existen funciones que son Riemann integrables pero que no tienen una primitiva. Este es el caso en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.8.** La función de Thomae se define sobre $[0, 1]$ como $h(x) = 0$ si $x$ es irracional, $h(0) = 0$ y $h(x) = 1/n$ si $x = m/n$, donde $m, n \in \mathbb{N}$ no tienen factores en común (Ver Figura 1.1). La función $h$ está en $\mathcal{R}([0, 1])$, sin embargo, no tiene una primitiva.

*Demostración.* Primero mostraremos que $h \in \mathcal{R}([0, 1])$. Sea $\epsilon > 0$. Considere el conjunto $D_\epsilon = \{x \in [0, 1] : h(x) \geqslant \epsilon/2\}$ y note que es finito, digamos que tiene $n_\epsilon$ elementos. Ahora, tomemos $\delta_\epsilon = \epsilon/4n_\epsilon$ y sea $\pi$ tal que $||\pi|| < \delta_\epsilon$. Separamos $\pi$ en las subparticiones $\pi_1$ que tiene etiquetas en $D_\epsilon$ y $\pi_2$ que tiene etiquetas fuera de $D_\epsilon$. Notemos que $\pi_1$ tiene a lo más $2n_\epsilon$ intervalos de longitud total menor que $2n_\epsilon\delta_\epsilon = \epsilon/2$ y sus etiquetas $t \in D_\epsilon$ satisfacen

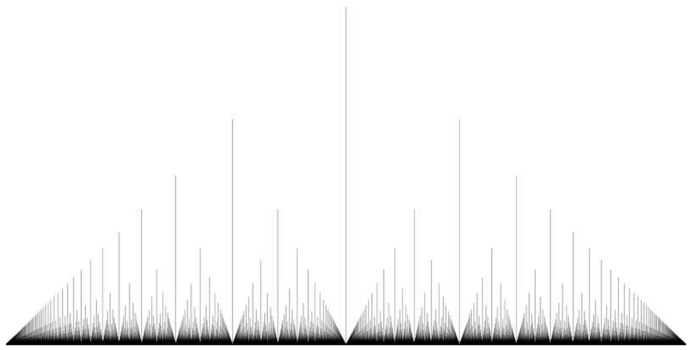

Figura 1.1: Función de Thomae

$0 < h(t) \leqslant 1$. También, la longitud total de los subintervalos en $\pi_2$ es menor o igual que 1 y por como definimos $D_\epsilon$, sus etiquetas $s$ satisfacen que $h(s) < \epsilon/2$.

Por lo tanto, concluimos que

$$S_\pi(h) = S_{\pi_1}(h) + S_{\pi_2}(h) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

lo que implica que $h$ es Riemann integrable con integral 0.

Ahora supongamos que existe una función $H$ tal que $H'(x) = h(x)$ para cada $x \in [0, 1]$. Si aplicamos el Teorema del Valor Intermedio para Derivadas, entonces dado cualquier número $c$ entre $H'(0) = 0$ y $H'(1) = 1$ existe un $x \in [0, 1]$ tal que $H'(x) = c$. Esto es falso, y para verificarlo basta tomar $0 < c = m/n < 1$ donde $m \neq 1$ ya que no hay ningún valor posible de $x$ para el cual $H'(x) = h(x) = c$. $\square$

## 1.2. Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann

En esta sección exploramos las conexiones entre la derivada y la integral en el contexto de Riemann. Veremos dos teoremas, de los cuales omitiremos las demostraciones, pero pueden ser revisadas con detalle en [3]. El primero tiene que ver con integrar una derivada; este teorema asegura que si $f$ es la derivada de una función $F$ y $f \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. El segundo teorema tiene que ver con diferenciar una integral.

**Teorema 1.9.** *(Primera parte)*
*Sean $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$, y $E$ un conjunto finito, tales que:*

- *$F$ es continua sobre $[a,b]$.*
- *$F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b] \backslash E$.*
- *$f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

*Entonces se cumple que*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

**Definición 1.10.** Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces la función definida por

$$F(x) := \int_a^x f \qquad x \in [a,b]$$

se llama la *integral indefinida* de $f$ con punto base $a$.

**Teorema 1.11.** *(Segunda parte)*
*Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y supongamos que $f$ es continua en un punto $c \in [a,b]$. Entonces la integral indefinida $F$ es diferenciable en $c$ y $F'(c) = f(c)$.*

**Corolario 1.12.** *Si $f$ es continua sobre $[a,b]$ entonces la integral indefinida $F$ es diferenciable sobre $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b]$.*

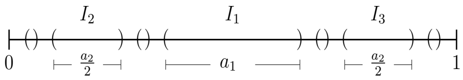


Figura 1.2: Construcción del conjunto de Cantor

En conjunto, a estos teoremas se les conoce como el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann.

Una gran debilidad de la integral de Riemann es que en general no es posible recuperar una función $F$ a partir de su derivada $F'$. Veremos en el siguiente ejemplo (producido por Volterra alrededor de 1880) que incluso si $F'$ existe para cada $x \in [0,1]$ y es acotada, no es necesario que $F'$ sea Riemann integrable y por tanto no se puede aplicar la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo. Note que por el Teorema de Riemann-Lebesgue ([8] p. 163) basta construir una derivada $F'$ que es discontinua en un conjunto de medida positiva.

La prueba de la existencia de dicha función es un poco delicada y requiere analizarla con detalle. Primero, explicamos cómo construir un conjunto *tipo Cantor* de cierta medida.

Podemos construir un conjunto tipo Cantor como sigue: sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de términos positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1/2$. Sea $I_1$ un intervalo abierto de longitud $a_1$ removido del centro de $[0,1]$ ; luego sean $I_2, I_3$ intervalos abiertos de longitud total $a_2$ removidos del centro de los intervalos restantes, y así sucesivamente (Ver Figura 1.2).

El conjunto $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ consiste de intervalos abiertos y disjuntos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = 1/2$. Sea $G := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. El complemento $\mathcal{C}$ es un conjunto tipo Cantor y $G$ es denso en $[0,1]$.

**Ejemplo 1.13.** Existe una función $F$ tal que $F'(x)$ existe para toda $x \in [a,b]$ y es acotada, pero no es Riemann integrable.

*Demostración.* Sea $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos $I_n \subset [0,1]$ abiertos y

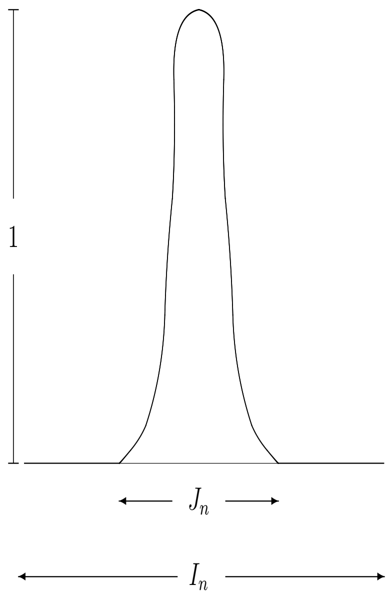


Figura 1.3: Gráfica de $f$ sobre $I_n$.

disjuntos tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ es denso, la longitud total es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = 1/2$$

y su complemento $\mathcal{C}$ es un conjunto tipo Cantor. Esto es posible por el argumento dado en el párrafo anterior.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos un intervalo cerrado $J_n$ centrado en $I_n$ con $\ell(J_n) = \ell(I_n)^2$.

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua sobre cada $I_n$ tal que toma el valor 1 en el centro de los $J_n$ y se anula fuera de ellos (Ver Figura 1.3).

Aseguramos que la función $f$ es discontinua en cada punto de $\mathcal{C}$: si $x \in \mathcal{C}$ entonces es un punto de acumulación de $\mathcal{C}$, y por tanto, para cualquier intervalo $(u, v)$ que contiene a $x$, podemos encontrar $y \in (u, v) \cap \mathcal{C}$. El intervalo abierto con extremos $x, y$ debe contener algún $I_n$ (ya que los $I_n$ son densos en $[0, 1]$) y por consiguiente un punto $t \in I_n$ donde $f(t) = 1$. Por lo tanto, para

$x \in \mathcal{C}$ existe un intervalo $(u, v)$ de longitud arbitrariamente pequeña tal que contiene a un punto $t$ que satisface $|f(x) - f(t)| = |f(t)| = 1$. Esto prueba la discontinuidad de $f$ en $x$, para cada $x \in \mathcal{C}$. Luego, como $\mathcal{C}$ tiene medida $1/2$, entonces $f$ no es Riemann integrable.

Ahora probaremos que $f$ es una derivada. La restricción de $f$ a $I_n$ tiene una primitiva (lo cual es posible porque $f$ es continua ahí). Como $f$ se anula fuera de los $J_n$, definimos la función $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n \cap [0,x]} f,$$

y probaremos que $F$ es una primitiva de $f$.

Dado que $f$ es continua sobre cada punto $x \in G$, entonces el TFC aplicado a la restricción de $f$ en $G$ implica que $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in G$. Por otro lado, probaremos que $F'(x)$ existe para cada $x \in \mathcal{C}$ y que es igual a $f(x) = 0$. Con esto, terminaríamos la prueba.

Sea que $K \subset [0, 1]$ arbitrario y supongamos que $K \cap J_n \neq \emptyset$ para alguna $n$. Como $\ell(I_n) \leqslant 1/2$, se sigue que

$$\ell(K \cap I_n) \geqslant \frac{1}{2}[\ell(I_n) - \ell(J_n)] \geqslant \frac{1}{2}[\ell(I_n) - \frac{1}{2}\ell(I_n)] \geqslant \frac{1}{4}\ell(I_n),$$

y entonces

$$\ell(K \cap J_n) \leqslant \ell(J_n) = \ell(I_n)^2 \leqslant 16\,\ell(K \cap I_n)^2.$$

Luego

$$\sum_{K \cap J_n \neq \emptyset} \ell(K \cap I_n)^2 \leqslant \sum_{K \cap J_n \neq \emptyset} 16\,\ell(K \cap I_n)^2 \leqslant 16\,\ell(K)^2.$$

Sea $x \in \mathcal{C}$. Con la ayuda de la última ecuación concluiremos que efectivamente $F'(x) = f(x) = 0$. Note que si el intervalo $[u, v]$ contiene a $x$, entonces

$$0 \leqslant F(v) - F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n \cap [u,v]} f \leqslant 16\,(v - u)^2.$$

Por consecuencia, $F'(x)$ existe y es igual a $f(x) = 0$. Por lo tanto, la función $f$ es acotada y es la derivada de una función, sin embargo no es Riemann integrable. En otras palabras, $F$ no puede ser recuperada a partir de su derivada $f$. $\square$

## 1.3. Relaciones de cobertura y motivación

Como hemos observado y discutido en los ejemplos anteriores, cuando uno trabaja con la integral de Riemann normalmente el procedimiento es primero escoger los intervalos, cada uno de los cuales es de longitud menor que cierta $\delta > 0$, y después se escoge una etiqueta para cada intervalo $I_j$. Notemos entonces que la medida de fineza de una partición es dada por la máxima longitud de los subintervalos $I_j$, no dependiendo de la elección de las etiquetas.

Otra observación es que la $\delta > 0$ que acota la norma de la partición es constante y por tanto los intervalos de la partición no siempre tienen una longitud adecuada. Por ejemplo, en la función de Dirichlet, si pudiésemos asignar a cada racional $r_n$ un intervalo de longitud a lo más $1/2^n$ en cualquier partición, las sumas de Riemann fueran arbitrariamente pequeñas.

En esta sección vamos a considerar la *relación* entre las etiquetas y los intervalos para determinar la medida de fineza de la partición.

**Definición 1.14.** Una *relación de cobertura* es una familia de parejas $([c, d], x)$, donde $x \in [c, d]$.

Ahora motivamos la definición de la integral de Henstock-Kurzweil ilustrando cómo es que podemos recuperar una función $F$ a partir de su derivada $F'$.

Partimos del supuesto de que $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$. Sea $\epsilon > 0$. Considere la relación de cobertura $\beta$ que consiste de todos los pares de intervalos y puntos $([c,d],t)$ para los cuales $t \in [c,d]$ con $[c,d] \subset [a,b]$, con la propiedad de que

$$\left| \frac{F(d) - F(c)}{d - c} - f(t) \right| \leqslant \epsilon.$$

Note que esta relación de cobertura es muy grande, ya que por definición de diferenciabilidad, para cada punto $t \in [a,b]$, existe un $\delta_t > 0$ tal que $\beta$ contiene a todas las parejas $([c,d],t)$ con $d - c < \delta_t$.

Supongamos que $\beta$ contiene una partición

$$\pi = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) \,:\, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

La diferencia $F(b) - F(a)$ se puede obtener como la suma telescópica $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$. Por tanto, obtenemos

$$\begin{aligned}\left|[F(b) - F(a)] - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})]\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \epsilon(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b - a).\end{aligned}$$

En otras palabras, concluimos que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leqslant \epsilon(b - a).$$

Esto nos dice que la integral puede ser aproximada por sumas de Riemann, pero seleccionando las etiquetas $t_i$ de una manera distinta a como se procede en el contexto de Riemann. Hemos usado una partición cuyos elementos provienen de una relación de cobertura que describe de manera natural la geometría del problema, es decir, partiendo de la diferenciabilidad de la integral indefinida $F$.

## 1.4. Cubiertas de Cousin

**Definición 1.15.** Una relación de cobertura $\beta$ es una *cubierta de Cousin de un intervalo* $[a, b]$ si para cada $x \in [a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que $\beta$ contiene todos los pares $([c, d], x)$, para los cuales $x \in [c, d] \subset [a, b]$ y $(d - c) < \delta$.

Sea $\beta$ una cubierta de Cousin del intervalo $[a, b]$, entonces $\beta$ es una cubierta de Cousin de cada subintervalo $[c, d] \subset [a, b]$. Para ver esto, considere $x \in [c, d] \subset [a, b]$. Como $x \in [a, b]$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\beta$ contiene a todos los pares $(I, x)$ con $x \in I \subset [a, b]$ y $\ell(I) < \delta$. Si el par $(J, x)$ es tal que $x \in J \subset [c, d]$ con $\ell(J) < \delta$, entonces $(J, x)$ debe estar en $\beta$ ya que $J \subset [a, b]$.

Es igualmente sencillo comprobar que dadas dos cubiertas de Cousin $\beta_1, \beta_2$ de $[a, b]$, entonces la intersección también es cubierta de Cousin de $[a, b]$: si $x \in [a, b]$ entonces existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $\beta_i$ contiene todos los pares $([c, d], x)$ con $x \in [c, d] \subset [a, b]$ y $(d - c) < \delta_i$, respectivamente. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se sigue que los pares $([c, d], x)$ con $(d - c) < \delta$ están todos en $\beta_1 \cap \beta_2$.

## 1.5. Lema de Cousin

En general, un *lema de cobertura* es una afirmación en la cual un subconjunto $\beta'$ puede ser extraído de alguna relación de cobertura $\beta$ con ciertas propiedades deseadas. El lema de cobertura central de este trabajo es conocido como *el lema de Cousin.*

**Lema 1.16.** *(de Cousin) Si $\beta$ es una cubierta de Cousin de un intervalo $[a, b]$, entonces $\beta$ contiene una partición de cada subintervalo compacto.*

*Demostración.* Primeramente, si $\beta$ no contiene una partición de $[a, b]$, entonces no contiene una partición de algún subintervalo más pequeño.

Supongamos que $\beta$ no contiene una partición de $[a, b]$. Escojamos un subintervalo $[a_1, b_1]$ de longitud menor que o igual a $(b - a)/2$, tal que $\beta$ no contiene una partición de $[a_1, b_1]$. Continuemos inductivamente, seleccionando una sucesión de intervalos compactos anidados $[a_n, b_n]$ cuya longitud es menor o igual que $(b - a)/2$ y tales que $\beta$ no contiene una partición de cada uno de ellos.

Por la propiedad de los intervalos compactos anidados, hay un punto $z$ que pertenece a la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Dado que $\beta$ es una cubierta de Cousin, existe un $\delta_z > 0$ tal que $\beta$ contiene a todo par $(I, z)$ donde $I$ es compacto en $[a, b]$ de longitud menor que $\delta_z$. En particular $\beta$ contiene a todos los pares $([a_n, b_n], z)$ para $n$ suficientemente grande tal que $(b_n - a_n) < \delta_z$. El conjunto $\pi = \{([a_n, b_n], z)\}$ que consiste de un solo elemento es en sí mismo una partición de $[a_n, b_n]$, y está contenido en $\beta$. Esto contradice nuestra suposición sobre $[a_n, b_n]$. Consecuentemente $\beta$ debe contener una partición de $[a, b]$.

Como $\beta$ es cubierta de Cousin para cada subintervalo $[c, d] \subset [a, b]$, entonces contiene una partición de $[c, d]$. □

**Observación 1.17.** Toda cubierta de Cousin de un intervalo $[a, b]$ contiene una partición de norma arbitrariamente pequeña. Para ver esto, considere $\epsilon > 0$. Para cada $x \in [a, b]$, existe $\delta_x > 0$ tal que $\beta$ contiene a todos los pares $(I, x)$ con $\ell(I) < \delta_x$. Basta definir la cubierta de Cousin

$$\beta' = \{(I, x) \in \beta \,:\, \ell(I) < \delta'_x := \min(\epsilon, \delta_x)\}.$$

Luego, por el Lema de Cousin existe una partición $\pi \subset \beta'$ y por como se eligió $\beta'$, $||\pi|| < \epsilon$.

## 1.5.1. Aplicaciones del Lema de Cousin

En esta subsección daremos algunos ejemplos sobre el uso del Lema de Cousin en análisis elemental, con el objetivo de mostrar la versatilidad de las relaciones de cobertura, no sólo en el contexto que nosotros abordamos.

**Ejemplo 1.18.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f'(x) = 0$ excepto en un conjunto numerable $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$. Entonces $f$ es constante.

*Demostración.* Fijemos el intevalo $[a, b]$ y sea $\epsilon > 0$. Queremos probar que

$$|f(b) - f(a)| < \epsilon.$$

Considere la relación

$$\beta_1 = \left\{([y, z], x) \, : \, x \in [y, z] \subset [a, b], \, f'(x) = 0, \, |f(z) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} \frac{(z - y)}{(b - a)}\right\}.$$

Ahora, usando la continuidad de $f$ en los puntos de $C$ construimos la relación

$$\beta_2 = \{([y, z], c_i) \, : \, c_i \in [y, z] \subset [a, b], \, c_i \in C, \, |f(z) - f(y)| < \epsilon/2^{i+1}\}.$$

El siguiente paso es observar que $\beta_1 \cup \beta_2$ es una cubierta de Cousin de $[a, b]$, lo cual se sigue directamente de las definiciones de diferenciación y continuidad. Ahora bien, por el Lema de Cousin, existe una partición

$$\pi = \{([a_{i-1}, a_i], x_i) \, : \, i = 1, 2, \ldots, k\}$$

contenida en $\beta_1 \cup \beta_2$. Entonces, obtenemos

$$|f(b) - f(a)| = \left|\sum_{i=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{A_1} + \sum_{A_2},$$

donde $A_j$ contiene los intervalos $[a_{i-1}, a_i]$, tales que $([a_{i-1}, a_i], x_i) \in \beta_j$, $j = 1, 2$. Por tanto,

$$\sum_{A_1} = \sum_{A_1} |f(a_i) - f(a_{i-1})| < \sum_{i=1}^{k} \frac{\epsilon}{2} \frac{(a_i - a_{i-1})}{(b - a)} = \frac{\epsilon}{2},$$

$$\sum_{A_2} = \sum_{A_2} |f(a_i) - f(a_{i-1})| < \sum_{i=1}^{k} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Esto es, $|f(b) - f(a)| < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, la prueba está completa.

□

**Ejemplo 1.19.** (Teorema de Weierstrass) Sea $f$ una función continua sobre $[a, b]$. Entonces $f$ alcanza su máximo valor sobre $[a, b]$.

*Demostración.* Supongamos lo contrario. Entonces, para cada $x \in [a, b]$ existe un número $X$ y un $\delta_x > 0$ tal que

$$f(t) < f(X), \qquad \text{para } x - \delta_x \leqslant t \leqslant x + \delta_x, \quad t \in [a, b].$$

Definamos la relación $\beta$ como sigue:

$$\beta = \{(I, x) : \exists\, X, \delta_x > 0,\ x \in I \subset [a, b] \,\text{y}\, f(t) < f(X) \,\text{para todo}\, t \in I,\ \ell(I) < \delta_x\}.$$

Según lo discutido anteriormente, $\beta$ es una cubierta de Cousin de $[a, b]$ y por el Lema de Cousin $\beta$ contiene una partición

$$\pi = \{(I_j, x_j) : 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Sea $f(X_k)$ el valor más grande de los $n$ valores $f(X_j)$ que obtenemos a partir de los elementos de la partición. Entonces $f(X_j) \leqslant f(X_k)$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. Por otro lado, dado que la unión de los $I_j$ es $[a, b]$, tenemos que $X_k$ está en algún subintervalo $I_i$, y por tanto $f(X_k) < f(X_i)$. Se sigue que

$$f(X_k) < f(X_i) \leqslant f(X_k),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $f$ alcanza su máximo. □

**Ejemplo 1.20.** (El axioma de completez de los reales) Todo conjunto $S \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado, tiene un supremo. Probaremos este principio usando el Lema de Cousin.

*Demostración.* Sea $S \subset [a, b]$ no vacío. Supongamos que no existe una mínima cota superior para $S$. Considere la siguiente relación de cobertura:

$$\beta = \{([c, d], x) \,:\, c \text{ es cota superior de } S, \text{ o bien } d \text{ no es cota superior de } S\}.$$

Veremos que $\beta$ es una cubierta de Cousin de $[a, b]$.

Si $x \in S$ entonces existe $y \in S$ tal que $x < y$. De lo contrario, si para toda $y \in S$ tenemos $x \geqslant y$, entonces $x$ sería la mínima cota superior, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por tanto, sea $\delta_x = y - x > 0$, de manera que $\beta$ contiene a todos los pares $([c, d], x)$ donde $d - c < \delta_x$ y $d$ no es cota superior para $S$ ya que $d < y$.

Si $x \in [a, b] \backslash S$ y $x$ es cota superior para $S$, entonces existe una cota superior $z$ tal que $z < x$. En tal caso, tomemos $\delta_x = x - z > 0$. Por tanto, $\beta$ contiene los pares $([c, d], x)$ donde $d - c < \delta_x$ y $c$ es cota superior para $S$ ya que $z < c$.

Si $x \in [a, b] \backslash S$ y $x$ no es cota superior para $S$, entonces debe ser una cota inferior para $S$. Sea $y \in S$ fija y tomemos $\delta_x = y - x > 0$. Note que $y$ no puede ser cota superior por que en tal caso sería la mínima cota superior. Por tanto, $\beta$ contiene los pares $([c, d], x)$ donde $d - c < \delta_x$ y $d$ no es cota superior para $S$ ya que $d < y$.

Entonces, efectivamente $\beta$ es una cubierta de Cousin de $[a, b]$. Ahora bien, por el Lema de Cousin podemos extraer una partición $\pi = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{i=1}^n$. Claramente $a_0 = a$ no es cota superior para $S$, luego por la forma de $\beta$, $a_1$ tampoco lo es, y así sucesivamente. Entonces concluimos que ninguno de los $a_i$ es cota superior para $S$, pero esto es una contradicción porque $a_n = b$ es cota superior. $\square$

## 1.6. Definición de la HK-integral

En la Sección 1.3 exploramos una relación de cobertura que involucraba la conexión entre una función y su derivada. Bajo el supuesto de que dicha relación de cobertura contenía una partición, concluimos que siempre era posible recuperar la función a partir de su derivada. Si llevamos esto al contexto de la integral de Riemann, encontramos excepciones importantes, ya que para recuperar una función a partir de su derivada (es decir, que al integrar $F'$ sobre $[a,b]$ obtengamos $F(b)-F(a)$), se requiere que la derivada sea Riemann integrable. Lebesgue debilitó esta hipótesis pidiendo que la función $F$ fuera absolutamente continua.

El requerimiento de que la derivada de una función sea integrable motiva el desarrollo de la integral de Henstock-Kurzweil.

**Definición 1.21.** Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *HK-integrable sobre un intervalo* $[a,b]$ si existe un número $A$ tal que para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a,b]$, con la propiedad de que

$$\left| \sum_{(I,x)\in\pi} f(x)\ell(I) - A \right| < \epsilon \tag{1.2}$$

para cada partición $\pi$ contenida en $\beta$.

**Observación 1.22.** Usualmente, encontramos la definición de HK-integrabilidad haciendo uso de funciones positivas $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ conocidas como "gauges". Si $\pi = \{([u_i,v_i],t_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ entonces se dice que $\pi$ es *$\delta$-fina* si

$$t_i \in [u_i,v_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)].$$

Resulta que el Lema de Cousin tiene su equivalente para un gauge en el siguiente sentido: si $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ es un gauge y $a \leqslant c < d \leqslant b$, entonces existe una partición $\delta-$fina de $[c,d]$.

Se dice que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es HK-integrable si existe un $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe un gauge $\delta$ con la propiedad de que si $\pi$ es una partición $\delta-$fina entonces la ecuación (1.2) se verifica. Esta definición es equivalente a la Definición 1.21, ya que una cubierta de Cousin determina un gauge $\delta$ como vimos en la Definición 1.15 y viceversa, un gauge define una cubierta de Cousin.

Supongamos que $f$ es HK-integrable sobre $[a, b]$. Sea $\epsilon > 0$ y $\delta$ un gauge correspondiente a la $\epsilon > 0$ por definición de integrabilidad. Sea $\{\delta_n\}$ una sucesión decreciente en los reales que converge a cero y definamos la función $\delta^* : [a, b] \to (0, \infty)$ como sigue:

$$\delta^*(x) = \begin{cases} \delta_1 & \delta_1 \leqslant \delta(x) \\ \delta_k & \delta_k \leqslant \delta(x) < \delta_{k-1} \quad k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

La propiedad en (1.2) se sigue verificando si tomamos $\delta^*$ en lugar de $\delta$, ya que si $\pi$ es $\delta^*-$fina entonces también es $\delta-$fina.

Note que la integrabilidad de Riemann en la Definición 1.2 puede ser formulada en términos de particiones $\delta-$finas, pero en dicho caso $\delta$ sería una función constante. Como arriba estamos usando una cantidad numerable de constantes $\delta_1, \delta_2, \ldots$ a cambio de una sola, en este sentido podemos decir que *la HK-integral es una extensión numerable de la integral de Riemann.*

Ahora probaremos que si $f$ es HK-integrable, entonces el número $A$ es único. A la clase de funciones HK-integrables sobre un intervalo compacto $I$ la denotaremos por $\mathcal{HK}(I)$.

Por brevedad escribiremos en adelante $S_\pi(f)$ por $\sum_{(I,x)\in\pi} f(x)\ell(I)$.

**Teorema 1.23.** *(Unicidad)*

*Si $f \in \mathcal{HK}(I)$ entonces el valor de $A$ que satisface la propiedad en la Definición 1.21 está determinado unívocamente.*

*Demostración.* Supongamos que $A'$ y $A''$ satisfacen la definición. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existen cubiertas de Cousin $\beta'$ y $\beta''$ tales que

$$|S_{\pi'}(f) - A'| < \epsilon/2 \qquad \text{y} \qquad |S_{\pi''}(f) - A''| < \epsilon/2 \tag{1.3}$$

para cada $\pi' \subset \beta'$ y $\pi'' \subset \beta''$. Sea $\beta = \beta' \cap \beta''$. Una partición $\pi \subset \beta$ es partición en $\beta'$ y en $\beta''$, luego las relaciones en (1.3) siguen siendo ciertas. Entonces para dicha partición $\pi$ tenemos

$$|A' - A''| \leqslant |A' - S_\pi(f)| + |S_\pi(f) - A''| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $A' = A''$. □

Al valor $A$ lo llamamos *la HK-integral de $f$ sobre* $[a, b]$.

### 1.6.1. Criterio de Cauchy

El siguiente resultado nos permite verificar la integrabilidad de una función sin conocer el valor de su integral.

**Teorema 1.24.** *(Criterio de Cauchy)*

*Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in \mathcal{HK}(I)$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta de Cousin $\beta$, tal que si $\pi_1, \pi_2$ son particiones contenidas en $\beta$ entonces*

$$|S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)| < \epsilon.$$

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $f$ es HK-integrable y su integral es $A$. Dado $\epsilon > 0$ existe una cubierta $\beta$ tal que

$$|S_\pi(f) - A| < \epsilon/2$$

para cada $\pi \subset \beta$. Ahora bien, sean $\pi_1, \pi_2 \subset \beta$, entonces

$$|S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)| \leqslant |S_{\pi_1}(f) - A| + |A - S_{\pi_2}(f)| < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Para cada $n$, escogemos $\beta_n$ con la propiedad de que si $\pi_1, \pi_2 \subset \beta_n$ entonces

$$|S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)| < 1/n.$$

Podemos escogerlas de manera que $\beta_1 \supset \beta_2 \supset \cdots$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $\pi_m$ una partición contenida en $\beta_m$. La sucesión

$$\{S_{\pi_m}(f)\}_{m=1}^{\infty}$$

es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ ya que si $n < m$ entonces $\pi_m$ también es una partición de $\beta_n$. De esta manera para cada $n < m$ y particiones $\pi_n$, $\pi_m$, tenemos

$$|S_{\pi_n}(f) - S_{\pi_m}(f)| < \frac{1}{n},$$

y por tanto converge a algún número $A$.

Luego,

$$\lim_{m\to\infty} |S_{\pi_n}(f) - S_{\pi_m}(f)| = |S_{\pi_n}(f) - A| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Vamos a probar que $A = \int_I f$. Dado $\epsilon > 0$, sea $K \in \mathbb{N}$ tal que $K > 2/\epsilon$. Si $\pi'$ es una partición contenida en $\beta_K$, entonces

$$|S_{\pi'}(f) - A| \leqslant |S_{\pi'}(f) - S_{\pi_K}(f)| + |S_{\pi_K}(f) - A| \leqslant \frac{1}{K} + \frac{1}{K} < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces $f \in \mathcal{HK}(I)$ y su integral es $A$. □

### 1.6.2. Una definición equivalente

Hay una versión equivalente a la definición de HK-integral usando integrales inferiores y superiores.

Fijemos una cubierta de Cousin $\beta$. La *suma inferior* $L(f,\beta)$ y la *suma superior* $S(f,\beta)$ de una función $f$ definida sobre $[a,b]$ están dadas por

$$L(f,\beta) = \inf_{\pi\subset\beta} \sum_{(I,x)\in\pi} f(x)\ell(I) = \inf_{\pi\subset\beta} S_\pi(f), \tag{1.4}$$

$$S(f,\beta) = \sup_{\pi\subset\beta} \sum_{(I,x)\in\pi} f(x)\ell(I) = \sup_{\pi\subset\beta} S_\pi(f), \tag{1.5}$$

donde el ínfimo y el supremo se toman sobre todas las particiones en $\beta$.

**Definición 1.25.** Sea $f$ una función real definida sobre $[a, b]$. Definimos la *integral inferior* $\underline{I}$ por

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\beta} L(f, \beta),$$

donde el supremo se toma sobre todas las cubiertas de Cousin de $[a, b]$. Análogamente definimos a la *integral superior* $\overline{I}$ como el ínfimo de las sumas superiores.

Si tenemos que $\underline{I} = \overline{I}$, denotaremos el valor común por $\int_a^b f$. Si además este valor es finito decimos que $f$ *es (*)-integrable.*

Es sencillo notar que $L(f, \beta) \leqslant S(f, \beta)$. Por otro lado, consideremos dos cubiertas de Cousin $\beta, \beta_1$ de $[a, b]$, tales que $\beta_1 \subset \beta$. Cualquier partición en $\beta_1$ es una partición en $\beta$, pero el recíproco no es necesariamente cierto. Entonces $L(f, \beta) \leqslant L(f, \beta_1)$. Similarmente, $S(f, \beta_1) \leqslant S(f, \beta)$. Concluimos que

$$L(f, \beta) \leqslant L(f, \beta_1) \leqslant S(f, \beta_1) \leqslant S(f, \beta) \qquad \text{si } \beta_1 \subset \beta. \tag{1.6}$$

En particular, si $\beta_1$ y $\beta_2$ son cubiertas de Cousin arbitrarias y $\beta = \beta_1 \cap \beta_2$ entonces

$$L(f, \beta_1) \leqslant L(f, \beta) \leqslant S(f, \beta) \leqslant S(f, \beta_2).$$

En otras palabras, cada suma inferior es menor que o igual a cada suma superior.

Ahora bien, sea $\beta$ una cubierta de Cousin arbitraria. Como $S(f, \beta)$ es cota superior para todas las sumas inferiores, y $\underline{I}$ es la mínima cota superior de las sumas inferiores, entonces

$$\underline{I} \leqslant S(f, \beta).$$

Por otro lado, como $\beta$ se tomó arbitraria, entonces $\underline{I}$ es cota inferior para todas las sumas superiores y como $\overline{I}$ es la máxima cota inferior de la sumas superiores se sigue que

$$\underline{I} \leqslant \overline{I}.$$

Por lo tanto,

$$L(f,\beta) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S(f,\beta) \tag{1.7}$$

para toda cubierta de Cousin $\beta$.

**Lema 1.26.** *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es (*)-integrable si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe una cubierta de Cousin $\beta$ tal que $S(f,\beta) - L(f,\beta) < \epsilon$.*

*Demostración.* Supongamos que $f$ es (*)-integrable. Sea $\epsilon > 0$. Por definición de ínfimo y supremo, existen cubiertas de Cousin $\beta_1, \beta_2$ tales que

$$\underline{I} - L(f,\beta_1) \leqslant \epsilon/2,$$
$$S(f,\beta_2) - \overline{I} \leqslant \epsilon/2.$$

Tomemos $\beta = \beta_1 \cap \beta_2$, por las relaciones (1.6) y (1.7) tenemos que

$$S(f,\beta) - L(f,\beta) < \epsilon.$$

Por otro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $\beta$ con la propiedad de que

$$S(f,\beta) - L(f,\beta) < \epsilon.$$

La relación (1.7) se cumple, entonces $[\underline{I}, \overline{I}] \subset [L, S]$. Se sigue que

$$\overline{I} - \underline{I} < \epsilon.$$

Como $\epsilon$ es arbitrario entonces $\underline{I} = \overline{I}$. $\square$

**Teorema 1.27.** *HK-integrabilidad es equivalente a (*)-integrabilidad.*

*Demostración.* Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es HK-integrable. Sea $\epsilon > 0$. Entonces por el Criterio de Cauchy existe una cubierta de Cousin $\beta$ con la propiedad de que si $\pi_1$ y $\pi_2$ son particiones contenidas en $\beta$, entonces

$$|S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)| < \epsilon/3.$$

Deseamos probar que $\underline{I} = \overline{I}$. Fijemos $\beta$ como antes. Considere la suma superior $S = S(f, \beta)$ y la suma inferior $L = L(f, \beta)$. Podemos encontrar particiones $\pi_1, \pi_2$ en $\beta$ tales que

$$S - S_{\pi_1}(f) < \epsilon/3, \qquad S_{\pi_2}(f) - L < \epsilon/3, \qquad |S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)| < \epsilon/3.$$

Por lo tanto podemos escribir

$$S - L \leqslant |S - S_{\pi_1}(f)| + |S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)| + |S_{\pi_2}(f) - L| < \epsilon.$$

Como los valores $\underline{I}, \overline{I}$ están en el intervalo $[L, S]$ cuya longitud es arbitrariamente pequeña, entonces $\underline{I} = \overline{I}$.

Por otro lado, supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es (*)-integrable. Digamos que el valor común es $A$. Por el lema anterior, para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a, b]$ tal que $S(f, \beta) - L(f, \beta) < \epsilon$. Claramente

$$L(f, \beta) \leqslant S_\pi(f) \leqslant S(f, \beta) \qquad \forall\, \pi \subset \beta.$$

Entonces por la relación (1.7) $A \in [L, S]$. Por lo tanto $|S_\pi(f) - A| < \epsilon$ para toda $\pi \subset \beta$, como queriamos probar. □

El uso de relaciones de cobertura permite ampliar la clase de funciones integrables. De hecho, veremos que toda función $f \in \mathcal{R}(I)$ es HK-integrable sobre $I$ y que la contención es propia. Para una función Riemann integrable, la $\delta > 0$ en la definición de integrabilidad nos sirve para definir la cubierta de Cousin, la cual contendrá intervalos-puntos donde la longitud del intervalo es menor que esta constante $\delta$.

**Teorema 1.28.** *(Teorema de Extensión)*

*Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y su integral igual a $A$, entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y su HK-integral también es $A$.*

*Demostración.* Supongamos que $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\pi$ es una partición etiquetada con $||\pi|| < \delta$, entonces $|S_\pi(f) - A| < \epsilon$.

Definamos la relación de cobertura $\beta$ como sigue:

$$\beta = \{(I, x) : x \in I \subset [a,b] \text{ y } \ell(I) < \delta/2\}.$$

Claramente $\beta$ es una cubierta de Cousin ya que cada $x$ cae en algún subintervalo $I$ de $[a,b]$ cuya longitud es $< \delta/2$. Por el Lema de Cousin contiene una partición $\pi = \{(I_i, x_i) : i \leqslant n\}$, tal que $\ell(I_i) < \delta/2$ para cada $i$. Luego $\pi$ es una partición con norma menor que $\delta$ y por consecuencia $|S_\pi(f) - A| < \epsilon$. Como $\pi$ es una partición arbitraria, concluimos que $f$ es HK-integrable y su integral también es $A$. $\square$

El Teorema de Extensión nos asegura que si una función es Riemann integrable entonces los valores de la integral de Riemann y la de Henstock-Kurzweil son iguales. Por tanto, no hay ambigüedad si denotamos la HK-integral con el mismo símbolo con que se denota la de Riemann. Entonces, los símbolos

$$\int_I f, \qquad \int_a^b f, \qquad \int_I f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx$$

representarán a la HK-integral de $f$. Si deseamos distinguir la HK-integral de otra integral la denotaremos por $\mathcal{HK}\int_a^b f$.

## 1.7. Algunos ejemplos

Damos a continuación un ejemplo para mostrar que la contención en el Teorema de Extensión es propia. Vimos en el Ejemplo 1.6 que la función de

Dirichlet no es Riemann integrable. Vamos a probar ahora que dicha función es HK-integrable.

**Ejemplo 1.29.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función constante $c$ excepto en un subconjunto numerable $C = \{c_i \in [a, b] : i \in \mathbb{N}\}$. Entonces $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ y $\int_a^b f = c(b - a)$.

*Demostración.* Dado $\epsilon > 0$, definimos las relaciones de cobertura $\beta_1$ y $\beta_2$ como sigue:

$$\beta_1 = \{(I, x) : x \in I \subset [a, b], x \notin C, \text{ y } \ell(I) < 1\},$$
$$\beta_2 = \{(I, c_i) : c_i \in I \subset [a, b], c_i \in C, \text{ y } \ell(I) < \epsilon/(f(c_i) - c)2^i.\}$$

La relación de cobertura $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ es una cubierta de Cousin del intervalo $[a, b]$. Sea $\pi = \{(I_i, x_i) : i \leqslant n\}$ una partición en $\beta$. La diferencia $|S_\pi(f) - c(b - a)|$ tiene la forma

$$\left| \sum_{(I,x)\in\pi} f(x)\ell(I) - c(b - a) \right| = \left| \sum_{(I,x)\in\pi} [f(x) - c]\ell(I) \right|.$$

Por tanto, las únicas contribuciones distintas de cero están dadas por las etiquetas en $C$, más aún

$$[f(c_i) - c]\ell(I) < \frac{\epsilon}{2^i} \quad \forall\, c_i \in C.$$

Por lo tanto obtenemos

$$\left| \sum_{(I,x)\in\pi} [f(x) - c]\ell(I) \right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon,$$

como queríamos demostrar. □

El ejemplo anterior es una generalización de la función de Dirichlet, donde el conjunto $C$ es los racionales y la constante es $c = 0$. Por lo tanto, la función de Dirichlet es HK-integrable con integral igual a cero.

La flexibilidad al variar la longitud de los intervalos nos permite *cubrir* un conjunto numerable de puntos con una unión de intervalos cuya longitud total es arbitrariamente pequeña de manera que no contribuye mucho a las sumas de Riemann. Usaremos este hecho para probar la siguiente proposición.

**Proposición 1.30.** *Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ un subconjunto numerable de $[a,b]$. Supongamos que $f(x) = g(x)$ excepto en los puntos $x \in C$. Entonces $g$ es HK-integrable y $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$. Como $f$ es HK-integrable, existe una cubierta de Cousin $\beta_1$ tal que

$$\left| S_\pi(f) - \int_a^b f \right| < \epsilon/2,$$

para cada partición $\pi \subset \beta_1$.

Considere los siguientes conjuntos:

$$\beta' = \left\{ (I_i, c_i) \,:\, c_i \in I \subset [a,b],\, c_i \in C,\, \ell(I_i) < \frac{\epsilon}{[f(c_i) - g(c_i)]2^{i+2}} \right\},$$
$$\beta'' = \{(I, x) \,:\, x \in I \subset [a,b],\, x \notin C\}.$$

Note que $\beta_2 = \beta' \cup \beta''$ es una cubierta de Cousin de $[a,b]$. Defina $\beta = \beta_1 \cap \beta_2$, la cual también es una cubierta de Cousin de $[a,b]$ y sea $\pi = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ una partición en $\beta$. Observe que si $t_i = c_k$ para alguna $k$ entonces

$$|f(t_i) - g(t_i)|\ell(I_i) < \epsilon/2^{k+2}.$$

y hay a lo más dos índices $i$ correspondientes a dicha $k$. Es decir, $c_k$ puede ser etiqueta de dos intervalos de la partición. En los otros puntos, dado que $f$ y $g$ sólo difieren en puntos de $C$, tendremos $|f(t_i) - g(t_i)|\ell(I_i) = 0$.

Como $\pi \subset \beta_2$, tenemos que

$$|S_\pi(f) - S_\pi(g)| = |S_\pi(f - g)| = \left| \sum_{(I_i, x_i) \in \pi \cap \beta'} [f(x_i) - g(x_i)]\ell(I_i) \right|$$
$$\leqslant \left| \sum_{i=1}^{\infty} [f(x_i) - g(x_i)]\ell(I_i) \right| < 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Como además $\pi \subset \beta_1$, concluimos que

$$\left| S_\pi(g) - \int_a^b f \right| \leqslant |S_\pi(g) - S_\pi(f)| + \left| S_\pi(f) - \int_a^b f \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $g \in \mathcal{HK}([a,b])$ y su integral es $\int_a^b f$. □

Veamos otro ejemplo, el cual trata de una modificación de la función de Thomae.

**Ejemplo 1.31.** Definimos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} n & x = m/n \text{ donde } m \text{ y } n \text{ no tienen factores en común} \\ 0 & x \text{ es irracional ó } 0. \end{cases}$$

Esta función es discontinua en todos los puntos de $[0,1]$: si $x = m/n$, sea $(x_k)$ una sucesión de irracionales en $[0,1]$ que converge a $x$. Luego, $\lim_{k\to\infty} g(x_k) = 0$, pero $g(x) = n \neq 0$. Si, por otro lado $y = 0$ ó $y \in \mathbb{I}$ y $\epsilon = 1$, para cualquier $\delta > 0$ podemos escoger un número racional $r$ tal que $y - \delta < r < y + \delta$, pero $|g(r) - g(y)| = |g(r)| \geqslant 1 = \epsilon$ ya que $g(r)$ es un natural. Entonces, $g$ es discontinua en todos sus puntos. Esto último nos asegura que $g \notin \mathcal{R}([0,1])$. Más aún, $g$ no es acotada sobre cualquier subintervalo no degenerado, lo cual se debe a la densidad de los racionales. Sin embargo, por la proposición anterior $g$ es HK-integrable y su integral es cero.

Otra ventaja de las relaciones de cobertura es que es posible definirlas de manera que forcemos a un punto $x$ del intervalo de integración a ser una etiqueta de todo subintervalo que lo contiene. Esto es muy útil cuando dicho punto dificulta controlar el valor de las sumas de Riemann, ya que escogiéndolo como una etiqueta, en ocasiones se puede eliminar este problema.

En el Ejemplo 1.4 vimos que la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ no es Riemann integrable porque no es acotada en $[0,1]$. En la teoría de integración de Riemann se puede definir la integral de esta función como una *integral impropia*. Veremos a continuación que usando relaciones de cobertura se puede remediar esta limitación.

**Ejemplo 1.32.** Sea $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para $x \in (0, r]$ y $f(0) = 0$. Sea $0 < \epsilon < 1/2$. Definamos la cubierta de Cousin $\beta$ del intervalo $[0, r]$ como

$$\beta = \{(I, x) \,:\, x \in I \subset [a, b],\ x \neq 0,\ \ell(I) < \epsilon x\} \cup \{(I, 0) \,:\, 0 \in I,\ \ell(I) < \epsilon^2\}.$$

Sea $\pi = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{i=1}^n$ una partición contenida en $\beta$. Note que $x_1 = 0$, ya que de otro modo ($x_1 > 0$) tendríamos $x_1 \leqslant a_1 = a_1 - a_0 < \epsilon x_1 < x_1$, lo cual es una contradicción. Notemos que para toda $i \neq 1$

$$\begin{aligned} a_i - a_{i-1} < \epsilon x_i \quad &\Rightarrow \quad a_i \leqslant x_i + \epsilon x_i \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{a_i}{x_i}} \leqslant \sqrt{1+\epsilon}, \\ a_{i-1} - a_i > -\epsilon x_i \quad &\Rightarrow \quad a_{i-1} \geqslant x_i - \epsilon x_i \ \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{a_{i-1}}{x_i}} \geqslant \sqrt{1-\epsilon}. \end{aligned}$$

También, tenemos

$$f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{x_i}}(\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i-1}})(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i-1}}), \quad \forall\, i \neq 1$$

de donde

$$2\sqrt{\frac{a_{i-1}}{x_i}}(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i-1}}) < f(x_i)(a_i - a_{i-1}) < 2\sqrt{\frac{a_i}{x_i}}(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i-1}}).$$

Por tanto, recordando que $S_\pi(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1})$ y tomando en cuenta que necesariamente $x_1 = 0$,

$$\begin{aligned} S_\pi(f) &< \sum_{i=2}^n 2\sqrt{\frac{a_i}{x_i}}(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i-1}}) \leqslant 2\sqrt{1+\epsilon}\sum_{i=2}^n (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i-1}}) = 2\sqrt{1+\epsilon}(\sqrt{r} - \sqrt{a_1}), \\ S_\pi(f) &> \sum_{i=2}^n 2\sqrt{\frac{a_{i-1}}{x_i}}(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i-1}}) \geqslant 2\sqrt{1-\epsilon}\sum_{i=2}^n (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i-1}}) = 2\sqrt{1-\epsilon}(\sqrt{r} - \sqrt{a_1}). \end{aligned}$$

Ya que $a_1 < \epsilon^2$ y $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos de las últimas dos ecuaciones que

$$\int_0^r f = 2\sqrt{r}.$$

**Observación 1.33.** En este caso forzamos al punto $x = 0$ a ser una etiqueta para cualquier partición y esto permitió que el término del intervalo izquierdo se anulara en las sumas de Riemann.

En general, hay ocasiones en las que podemos escoger una cubierta de Cousin $\beta$ apropiada de manera que cualquier punto $c$ puede ser forzado a ser una etiqueta para cada partición en $\beta$. La idea es la siguiente: si $a \leqslant c \leqslant b$ y escogemos $\beta$ como todos los pares $(I, x)$ con la propiedad de que $\ell(I) < |x - c|$ para $x \neq c$ y los pares $(I, c)$ tales que $\ell(I) > 0$ arbitraria, entonces $c$ está forzada a ser una etiqueta para cualquier partición contenida en $\beta$. De otro modo, si $\bar{c} \neq c$ es la etiqueta del par que contiene a $c$ en una partición, entonces $|\bar{c} - c| \leqslant \ell(I) < |\bar{c} - c|$ que es claramente una contradicción.

De igual manera, podemos forzar un número finito de puntos de $[a, b]$ a ser etiquetas para cualquier partición. Digamos que deseamos que los puntos en el conjunto $E = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ sean etiquetas para cualquier partición en una cierta $\beta$. Entonces una forma de definir la cubierta $\beta$ es como la unión de las siguientes dos relaciones:

$$\beta_1 = \{(I, x) \,:\, x \notin E,\, x \in I \subset [a, b],\, \ell(I) < \min\{|x - e_1|, |x - e_2|, \ldots, |x - e_n|\}\},$$
$$\beta_2 = \{(I, e_i) \,:\, e_i \in E,\, e_i \in I \subset [a, b],\, \ell(I) > 0\}.$$

Nos referiremos a la cubierta $\beta$ en la que forzamos a un conjunto finito de puntos $E$ a ser etiquetas como *una cubierta anclada sobre $E$*.

## 1.8. Propiedades

**Proposición 1.34.** *(Linealidad)*

*Sean $f, g \in \mathcal{HK}(I)$. Entonces*

*i)* $f + g \in \mathcal{HK}(I)$ *y* $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$.

*ii)* *Para* $c \in \mathbb{R}$, $cf \in \mathcal{HK}(I)$ *y* $\int_I cf = c \int_I f$.

*Demostración.* Parte i): Sea $\epsilon > 0$. Existen cubiertas de Cousin $\beta_1$, $\beta_2$ tales que si $\pi_1$ y $\pi_2$ son particiones en $\beta_1$ y $\beta_2$, respectivamente, entonces obtenemos

$$\left|S_{\pi_1}(f) - \int_I f\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \left|S_{\pi_2}(g) - \int_I g\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Definamos la cubierta de Cousin $\beta$ como $\beta = \beta_1 \cap \beta_2$, de manera que si $\pi$ es una partición en $\beta$, también lo es en $\beta_1$ y en $\beta_2$. Luego, se sigue que

$$\begin{aligned}\left|S_\pi(f+g) - \left(\int_I f + \int_I g\right)\right| &= \left|S_\pi(f) - \int_I f + S_\pi(g) - \int_I g\right| \\ &\leqslant \left|S_\pi(f) - \int_I f\right| + \left|S_\pi(g) - \int_I g\right| < \epsilon.\end{aligned}$$

Parte ii): El caso $c = 0$ es trivial. Supongamos que $c \neq 0$. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar una cubierta de Cousin $\beta$ de $I$ tal que

$$\left|S_\pi(f) - \int_I f\right| < \frac{\epsilon}{|c|} \qquad \forall\, \pi \subset \beta.$$

Note que $S_\pi(cf) = cS_\pi(f)$, y entonces se sigue que

$$\left|S_\pi(cf) - c\int_I f\right| = |c|\left|S_\pi(f) - \int_I f\right| < \epsilon. \qquad \square$$

**Proposición 1.35.** *(Positividad) Si $f \in \mathcal{HK}(I)$ y $f(x) \geqslant 0$ para cada $x \in I$, entonces $\int_I f \geqslant 0$.*

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$. Existe una cubierta de Cousin $\beta$ de $I$ tal que $|S_\pi(f) - \int_I f| < \epsilon$ para cada partición $\pi \subset \beta$. Como $f \geqslant 0$, entonces

$$0 \leqslant S_\pi(f) < \int_I f + \epsilon,$$

y ya que $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $\int_I f \geqslant 0$. $\square$

**Corolario 1.36.** *(Monotonía) Si $f$ y $g$ son HK-integrables y $f(x) \leqslant g(x)$ para cada $x \in I$, entonces*

$$\int_I f \leqslant \int_I g.$$

*Demostración.* Considere la función $h(x) = g(x) - f(x) \geqslant 0$. Por la proposición anterior, tenemos que $\int_I h \geqslant 0$. Por la linealidad de la integral concluimos que

$$\int_I h = \int_I (g - f) = \int_I g - \int_I f \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_I g \geqslant \int_I f. \qquad \square$$

**Corolario 1.37.** *Si $f$ y $|f|$ son ambas HK-integrables sobre $I$ entonces*

$$\left| \int_I f \right| \leqslant \int_I |f|.$$

*Demostración.* Ya que $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ para cada $x \in I$, aplicando el corolario anterior concluimos que $-\int_I |f| \leqslant \int_I f \leqslant \int_I |f|$. $\square$

**Observación 1.38.** Si $f$ es Riemann integrable entonces $|f|$ también lo es ([3] p. 216). Para la integral de Lebesgue este hecho es directo de la definición. Sin embargo, esto no pasa con la HK-integral. En la Sección 1.10 veremos el ejemplo de una función HK-integrable cuyo valor absoluto no lo es.

**Corolario 1.39.** *Si $f$ es HK-integrable y $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para toda $x \in [a, b]$ entonces*

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b - a).$$

*Demostración.* En el Ejemplo 1.29 vimos que $\int_a^b c = c(b-a)$ para toda $c \in \mathbb{R}$. Por la monotonía de la HK-integral, el corolario se verifica. $\square$

### 1.8.1. La integral como una función de intervalos

Ahora mostraremos que si una función es HK-integrable sobre un intervalo, entonces también lo es sobre cualquier subintervalo de éste. Como consecuencia, probamos que la HK-integral es aditiva.

**Lema 1.40.** *Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$. Entonces $f$ es HK-integrable sobre cualquier subintervalo $[c,d] \subset [a,b]$.*

*Demostración.* Por el criterio de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a,b]$ de manera que siempre que $\pi_1, \pi_2$ sean particiones contenidas en $\beta$ entonces debemos tener

$$|S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)| < \epsilon.$$

Sea $a < c < d < b$. En la Sección 1.4 vimos que $\beta$ es una cubierta de Cousin de $[c,d]$. Sean $\pi_3, \pi_4$ particiones de $[c,d]$ contenidas en $\beta$ y sea $\pi$ una partición en $\beta$ de $[a,c] \bigcup [d,b]$ (la cual se puede obtener uniendo dos particiones de los subintervalos $[a,c]$ y $[d,b]$). Entonces $\pi_3 \cup \pi$ y $\pi_4 \cup \pi$ son particiones de $[a,b]$ y por tanto se sigue que

$$|S_{\pi_3}(f) - S_{\pi_4}(f)| = |S_{\pi_3 \cup \pi}(f) - S_{\pi_4 \cup \pi}(f)| < \epsilon.$$

Si $c = a$ ó $d = b$ entonces $\pi$ sería una partición de $[d,b]$ ó $[a,c]$, respectivamente y la prueba continuaría de la misma forma. □

**Proposición 1.41.** *(Aditividad) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Entonces $f$ es HK-integrable sobre $[a,b]$ si y sólo si sus restricciones sobre $[a,c]$ y $[c,b]$ son ambas HK-integrables. En este caso,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Se sigue del lema anterior.

($\Leftarrow$) Sea $f$ HK-integrable sobre dos intervalos adyacentes $[a,c]$, $[c,b]$ con $a < c < b$. Como vimos anteriormente podemos cambiar el valor de $f$ en un punto y el valor de la integral no se modifica. Por conveniencia hagamos $f(c) = 0$.

Como $f$ es HK-integrable sobre $[a,c]$ existe una cubierta de Cousin $\beta_1$ con la propiedad de que

$$\left| S_\pi(f) - \int_a^c f \right| < \epsilon/2 \qquad \text{para cada } \pi \subset \beta_1$$

Similarmente, dado que $f$ es HK-integrable sobre $[c,b]$ existe una cubierta de Cousin $\beta_2$ tal que

$$\left| S_\pi(f) - \int_c^b \right| < \epsilon/2 \qquad \text{para cada } \pi \subset \beta_2$$

Construimos una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a,b]$ a partir de $\beta_1$ y $\beta_2$ tomando todos los pares en ambas, cuyas etiquetas son distintas de $c$. Agregamos también aquellos pares $([s,t],c)$ para los cuales $([s,c],c)$ está en $\beta_1$ y $([c,t],c)$ está en $\beta_2$.

Entonces, si $\pi$ es una partición arbitraria contenida en $\beta$ podemos descomponer a $\pi$ en dos particiones $\pi_1$ y $\pi_2$ tales que $\pi_1 \subset \beta_1$ y $\pi_2 \subset \beta_2$. Se sigue que

$$S_\pi(f) = S_{\pi_1}(f) + S_{\pi_2}(f).$$

En el caso en que $\pi$ contenga un par de la forma $([s,t],c)$, lo dividimos en los pares $([s,c],c)$, $([c,t],c)$ y esto no afectará el valor de las sumas porque $f(c) = 0$.

Por tanto

$$\left| S_\pi(f) - \left( \int_a^c f + \int_c^b f \right) \right| \leqslant \left| S_{\pi_1}(f) - \int_a^c \right| + \left| S_{\pi_2}(f) - \int_c^b f \right| . < \epsilon \quad \square$$

**Corolario 1.42.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ una partición de $[a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ si y sólo si las restricciones de $f$ a cada subintervalo $[c_{i-1}, c_i]$ son HK-integrables y*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

*Demostración.* Esto se sigue por inducción matemática usando la proposición anterior. □

**Definición 1.43.** Una función $s : I \to \mathbb{R}$ se dice que es una *función escalonada* sobre $I$ si existe una partición $\{[c_{i-1}, c_i]\}_{i=1}^n$ de $I$ y números reales $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ tal que

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{(c_{i-1}, c_i)}(x).$$

**Observación 1.44.** Los valores de la función escalonada $s$ en los puntos de la partición $c_i$ podrían diferir de los valores $\alpha_i$. Sin embargo, estos valores no serán de importancia para los propósitos de integración ya que hemos visto que si modificamos a una función en un conjunto numerable de puntos el valor de la integral no cambia (ver Proposición 1.30).

**Corolario 1.45.** *Si $s$ es una función escalonada como en la Definición 1.43, entonces $s \in \mathcal{HK}(I)$ y tiene HK-integral igual a*

$$\int_I s = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} s = \sum_{i=1}^n \alpha_i (c_i - c_{i-1})$$

# 1.9. Clases de funciones HK-integrables

En esta sección mostraremos la HK-integrabilidad de algunas clases de funciones. En la primera parte se proporciona un criterio de integrabilidad muy útil y se prueba la existencia de una función que no es HK-integrable en el Ejemplo 1.50, de la cual haremos referencia en varias ocasiones para contraejemplos.

## 1.9.1. Apiñar a una función

En ocasiones es difícil determinar si una función es HK-integrable. Otra manera indirecta de probarlo, además del criterio de Cauchy, es tomando dos funciones HK-integrables que la *apiñen* en el sentido de la siguiente proposición. Las funciones escalonadas son de mucha utilidad en esta técnica ya que todas éstas son HK-integrables.

**Proposición 1.46.** *(Apiñamiento) Una función $f$ es HK-integrable sobre $I$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existen funciones $\phi$ y $\Phi$ HK-integrables sobre $I$ con la propiedad de que $\phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \Phi(x)$ para $x \in I$, y tal que*

$$\int_I (\Phi - \phi) \leqslant \epsilon.$$

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Si $f$ es HK-integrable, tomar $\phi = \Phi = f$.

($\Leftarrow$) Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que se cumplen las hipótesis para la segunda parte del teorema. Como $\phi$ es HK-integrable entonces existe una cubierta de Cousin $\beta_1$ tal que $|S_{\pi_1}(\phi) - \int_I \phi| < \epsilon$ para cualquier $\pi_1 \subset \beta_1$. De igual forma, existe una cubierta $\beta_2$ tal que $|S_{\pi_2}(\Phi) - \int_I \Phi| < \epsilon$ para cualquier $\pi_2 \subset \beta_2$.

Tomemos $\beta = \beta_1 \cap \beta_2$. Si $\pi, \pi'$ son particiones contenidas en $\beta$ se sigue que

$$S_\pi(\phi) \leqslant S_\pi(f) \leqslant S_\pi(\Phi) \quad \text{y} \quad -S_{\pi'}(\Phi) \leqslant -S_{\pi'}(f) \leqslant -S_{\pi'}(\phi)$$

de manera que
$$\int_I \phi - \epsilon \leqslant S_\pi(f) \leqslant \int_I \Phi + \epsilon$$
y
$$-\int_I \Phi - \epsilon \leqslant -S_{\pi'}(f) \leqslant -\int_I \phi + \epsilon.$$
Sumando las dos últimas desigualdades obtenemos
$$-\int_I (\Phi - \phi) - 2\epsilon \leqslant S_\pi(f) - S_{\pi'}(f) \leqslant \int_I (\Phi - \phi) + 2\epsilon.$$

Por tanto concluimos que
$$|S_\pi(f) - S_{\pi'}(f)| \leqslant \int_I (\Phi - \phi) + 2\epsilon \leqslant 3\epsilon.$$

Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario, $f$ satisface el Criterio de Cauchy y por lo tanto $f$ es HK-integrable sobre $I$. □

**Corolario 1.47.** *Toda función $f$ continua sobre un intervalo $[a, b]$ es HK-integrable.*

*Demostración.* Sea $f$ continua sobre $[a, b]$ y sea $\epsilon > 0$. Por continuidad, para cada $x \in [a, b]$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ siempre que $|x - y| < \delta$. Formemos una cubierta de Cousin usando este hecho, a saber,

$\beta = \{(I, x) \mid x \in I, \ell(I) < \delta, \delta$ es la correspondiente por la continuidad de $f$ en $x\}$.

Como $\beta$ es una cubierta de Cousin de $[a, b]$, entonces podemos extraer una partición $\pi = \{(I_j, a_j)\}_{j=1}^n$. Definamos $\phi(x) = f(a_j) - \epsilon$ y $\Phi(x) = f(a_j) + \epsilon$ para $x \in I_j$. Las funciones $\phi$ y $\Phi$ son escalondas y apiñan a $f$ ya que para cada $j$ tenemos $f(a_j) - \epsilon < f(x) < f(a_j) + \epsilon$ para toda $x \in I_j$. De aquí que
$$\int_a^b (\Phi - \phi) = 2\epsilon(b - a).$$
□

**Corolario 1.48.** *Si $f$ es monótona y acotada sobre $[a,b]$ entonces es HK-integrable.*

*Demostración.* Supongamos primeramente que $f$ es creciente. Sea $\epsilon > 0$. Existe $n$ suficientemente grande tal que

$$[f(b) - f(a)](b-a) < \epsilon n.$$

Dividamos $[a,b]$ en $n$ subintervalos $[a_i, b_i]$ de igual longitud y definamos $\phi(x) = f(a_i)$ y $\Phi(x) = f(b_i)$ para $x \in [a_i, b_i)$ y esto para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Note que $\phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \Phi(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Luego,

$$\int_a^b (\Phi - \phi) = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (\Phi - \phi) = \sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)](b_i - a_i) = [f(b) - f(a)]\frac{(b-a)}{n} < \epsilon.$$

Por lo tanto $f$ es HK-integrable. Con un argumento similar se prueba para $f$ decreciente. □

Hay funciones que son monótonas en un semi-cerrado pero que no son acotadas, sin embargo, son HK-integrables. La función del Ejemplo 1.4 es una muestra de ello. Desafortunadamente, si prescindimos de la condición de que una función sea acotada en el intervalo de integración no siempre podemos asegurar que sea HK-integrable. Damos un ejemplo de este hecho, pero primero probaremos un lema.

**Lema 1.49.** *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión contenida en $\mathcal{HK}(I)$ tal que $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$ para cada $x \in I$ y $\int_I f_n \geqslant n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $f$ no es HK-integrable.*

*Demostración.* Supongamos que $f$ es HK-integrable sobre $I$, en tal caso, por la monotonía de la integral

$$n \leqslant \int_I f_n \leqslant \int_I f \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Como $\int_I f$ es cota superior para $n$ arbitrariamente grande, debemos tener que $f$ no tiene integral finita. Por lo tanto $f \notin \mathcal{HK}(I)$. □

**Ejemplo 1.50.** La función $f(x) = 1/x$ para cada $x \in (0,1]$ y $f(0) = 0$ no es HK-integrable.

*Demostración:* Usaremos la idea del lema anterior. Lo más natural es construir una sucesión de funciones escalonadas tal que la integral diverge conforme hacemos tender $n$ al infinito. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, y cada uno de los términos tiene la forma de la función $1/x$, podemos aprovecharlo y definir para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ como sigue

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in (1/2, 1] \\ 2 & x \in (1/3, 1/2] \\ \vdots & \\ n-1 & x \in (1/n, 1/(n-1)] \\ 0 & [0, 1/n] \end{cases}$$

En otras palabras,

$$f_n(x) = \sum_{k=2}^{n} (k-1) \mathbf{1}_{(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}]}(x).$$

Claramente $f_n(x) \leqslant f(x)$ para toda $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$.

Por el Corolario 1.45, la integral de $f_n$ sobre $[0,1]$ es la suma $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$. Por contradicción, si suponemos que $f \in \mathcal{HK}([0,1])$, por la monotonía de la HK-integral obtenemos

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \int_0^1 f_n \leqslant \int_0^1 f, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo discutido anteriormente $f$ no puede ser HK-integrable.

### 1.9.2. Funciones reguladas

**Definición 1.51.** Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *regulada* sobre $I$ si para cada $\epsilon > 0$ existe una función escalonada $s : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - s(x)| \leqslant \epsilon, \quad \forall\, x \in I$$

**Observación 1.52.** De la definición es claro que las funciones escalonadas son reguladas.

**Proposición 1.53.** *(Integrabilidad de las funciones reguladas) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función regulada entonces $f$ es HK-integrable sobre $I$.*

*Demostración.* Dado $\epsilon > 0$, sea $s$ una función escalonada tal que satisface la definición anterior. Entonces las funciones $\phi(x) = s(x) - \epsilon$ y $\Phi(x) = s(x) + \epsilon$ son funciones escalonadas que apiñan a $f$. Más aún,

$$\int_I (\Phi - \phi) = \int_I 2\epsilon = 2\epsilon\ell(I).$$

Concluimos por el Teorema 1.46 que $f$ es HK-integrable. $\square$

El producto de funciones HK-integrables no necesariamente es integrable. Para verificar lo anterior recuerde que la función $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es HK-integrable. Sin embargo, $f^2 = 1/x$ como en el Ejemplo 1.50 no lo es.

En la teoría de integración de Riemann, es muy natural que el producto de dos funciones resulte ser Riemann integrable ya que si una función es Riemann integrable entonces su cuadrado también lo es ([3] p. 216).

A partir del Teorema 1.46, podemos obtener un resultado parcial que involucra el producto de funciones.

**Proposición 1.54.** *Sea $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ acotada por abajo y $g$ una función regulada sobre $[a, b]$. Entonces el producto $f \cdot g$ es HK-integrable sobre $[a, b]$.*

*Demostración.* Supongamos por lo pronto que $f$ es no-negativa. Si $s$ es una función escalonada entonces $f \cdot s$ es HK-integrable. Esto se sigue por la Linealidad y la Aditividad de la integral. Sea $A > \int_a^b f \geqslant 0$.

Dado que $g$ es regulada, existe una función escalonada $s$ tal que

$$|g(x) - s(x)| \leqslant \epsilon/(2A).$$

Luego, tenemos que

$$\phi(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant \Phi(x),$$

donde $\phi(x) = f(x)[s(x) - \epsilon/(2A)]$ y $\Phi(x) = f(x)[s(x) + \epsilon/(2A)]$ son ambas HK-integrables y tales que

$$\int_a^b (\Phi - \phi) = \int_a^b \frac{\epsilon}{A} f < \epsilon.$$

Por lo tanto $f \cdot g$ es HK-integrable. En el caso general en que $f$ toma valores negativos, si $m$ es una cota inferior de $f$ sobre $[a, b]$, entonces basta considerar la función no-negativa $f - m$. En este caso agregamos a $\phi(x)$ y a $\Phi(x)$ el término $m \cdot g(x)$ de tal manera que al tomar la diferencia $\Phi - \phi$ se anulará. $\square$

Una vez que veamos la fórmula de integración por partes al final de este capítulo, mostraremos con el Ejemplo 1.73 que el producto de una función HK-integrable y una función continua no es necesariamente HK-integrable. Esto es para ilustrar que no se puede prescindir de la condición de que $f$ sea acotada por abajo en la proposición anterior.

El siguiente resultado acerca de funciones reguladas lo usaremos en el Capítulo 4.

**Proposición 1.55.** *El conjunto de puntos de discontinuidad de una función regulada $f : I \to \mathbb{R}$ es un conjunto numerable de $I$.*

*Demostración.* Dado que $f$ es regulada, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una función escalonada $s_n : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - s_n(x)| \leqslant 1/n, \quad \forall x \in I.$$

Sea $D = \{x \in I \,:\, x \text{ es un punto de discontinuidad de } s_n, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$. Considere un punto $t \in I \backslash D$. Probaremos que $f$ es continua en $t$.

Sea $\epsilon > 0$. Existe $N$ suficientemente grande tal que $1/\epsilon < N$. Dado que $s_N$ es continua en $t$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - t| < \delta$ entonces $|s_N(x) - s_N(t)| < \epsilon$.

Por lo tanto, si $|x - t| < \delta$ tenemos

$$|f(x) - f(t)| \leqslant |f(x) - s_N(x)| + |s_N(x) - s_N(t)| + |s_N(t) - f(t)| < 3\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbritaria, concluimos que $f$ es continua en $t$ y por lo tanto es discontinua en a lo más un conjunto numerable. □

### 1.9.3. Funciones nulas

En esta sección definimos una clase de funciones que poseen una condición de nulidad sobre su dominio y probamos que este tipo de funciones son HK-integrables con integral igual a cero.

**Definición 1.56.** Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es *nulo* si para cada $\epsilon > 0$ existe una colección numerable $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos tales

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) \leqslant \epsilon.$$

**Definición 1.57.** Si $I \subset \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$, decimos que $f$ *es una función nula* si el conjunto $E = \{x \in I : f(x) \neq 0\}$ es un conjunto nulo.

**Lema 1.58.** *Sea $E \subset [a, b]$ un conjunto nulo y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) := \mathbf{1}_E(x)$. Entonces $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ y $\int_a^b f = 0$.*

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$ y $\{J_k\}$ una colección numerable proveniente de la definición de nulidad de $E$. Definamos la relación de cobertura $\beta_1$ como

$$\beta_1 = \{(I, x) : x \in [a, b]\backslash E,\ x \in I \subset [a, b],\ \ell(I) < 1\} \tag{1.8}$$

y tomando $k(x) := \min\{k : x \in J_k\}$ para cada $x \in [a, b]$, la relación de cobertura $\beta_2$ como

$$\beta_2 = \{(I, x) : x \in E,\ x \in I \subset [a, b],\ \ell(I) < \ell(J_{k(x)})\}.$$

Entonces $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ es una cubierta de Cousin de $[a,b]$. Sea $\pi = \{(I_i, t_i\}_{i=1}^n$ contenida en $\beta$. Note que los términos en $S_\pi(f)$ donde la etiqueta $t_i \notin E$ se anulan. Por otro lado, los intervalos $I_i$ que tienen etiquetas en $E \cap J_k$ tienen longitud total $< \ell(J_k)$ puesto que los $I_i$ son no traslapados. Por tanto

$$0 \leqslant S_\pi(f) < \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) < \epsilon. \qquad \square$$

Ahora podemos probar la situación más general.

**Proposición 1.59.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función nula. Entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y $\int_a^b f = 0$.*

*Demostración.* Sea $E = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E_n = \{x \in E : n-1 \leqslant |f(x)| < n\}$. Entonces $E_n$ también es un conjunto nulo. Luego, dado $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $\{J_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ una colección asociada a $E_n$ por la definición de nulidad tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_{n,k}) < \frac{\epsilon}{n2^n}.$$

Sea $\beta_1$ como en la ecuación (3.17). Ahora definiremos una relación de cobertura para las etiquetas en $E$. Ya que los $E_n$ son disjuntos, para cada $x \in E$ existe un único natural $n(x)$ tal que $x \in E_{n(x)}$. También, como lo hicimos antes en el Lema, sea $k(x) = \text{mín}\{k : x \in J_{n(x),k}\}$. Entonces, sea

$$\beta_2 = \{(I,x) : x \in E,\, x \in I \subset [a,b],\, \ell(I) < \ell(J_{n(x),k(x)})\}.$$

Nuevamente, $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ es una cubierta de Cousin de $[a,b]$ y podemos extraer una partición $\pi = \{(I_i, t_i)\}$ de $\beta$. Los términos en $S_\pi(f)$ cuyas etiquetas $t_i \notin E$ aportan ceros.

Para $n$ fija, siguiendo el razonamiento del lema anterior, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que los intervalos no traslapados $I_i$ con etiquetas $t_i$ en $E_n \cap J_{n,k}$

tienen longitud total $< \ell(J_{n,k})$. Como $|f(t_i)| < n$, entonces

$$\sum_{t_i \in E_n} |f(t_i)|\ell(I_i) < n \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_{n,k}) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Finalmente, como los conjuntos $E_n$ son disjuntos y $E = \bigcup E_n$, concluimos que

$$0 \leqslant S_\pi(f) < \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t_i \in E_n} |f(t_i)|\ell(I_i) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

Por lo tanto $f$ es HK-integrable sobre $[a, b]$ con integral igual a cero. □

El siguiente teorema es la generalización de la Proposición 1.30.

**Proposición 1.60.** *Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ y $E \subset [a, b]$ es un conjunto nulo. Si $g(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]\backslash E$, entonces $g \in \mathcal{HK}([a, b])$ y $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

*Demostración.* Considere la función $h(x) = f(x) - g(x)$ para cada $x \in [a, b]$. Entonces $h$ es una función nula, esto es, $\int_a^b h = 0$. El teorema está completo por la linealidad de la integral. □

## 1.10. Teorema Fundamental del Cálculo para la HK-integral

**Definición 1.61.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función HK-integrable. La *integral indefinida de $f$ con punto base $a$* es la función $F$ definida sobre $[a, b]$ como

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

para toda $a < t \leqslant b$. Una función que difiere de $F$ en una constante se le llama *integral indefinida de $f$*.

**Observación 1.62.** Dado que $f$ es HK-integrable sobre cualquier subintervalo compacto de $[a,b]$ y por la propiedad aditiva de la integral, tenemos que

$$\Delta F([c,d]) := F(d) - F(c) = \int_c^d f(x)dx$$

para todo $a \leqslant c < d \leqslant b$.

**Proposición 1.63.** *Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y sea $F$ como en la Definición 1.61. Entonces $F$ es una función continua sobre $[a,b]$.*

*Demostración.* Sea $c$ un punto arbitrario en $(a,b)$. Si modificamos a $f$ en el punto $c$ haciendo $f(c) = 0$, la función $F$ no cambia. Por conveniencia, supongamos que $f(c) = 0$. Sea $\epsilon > 0$. Probaremos que $F$ es continua en $c$ mostrando que es continua por la izquierda y por la derecha.

Es suficiente verificar la continuidad por la izquierda, es decir, que existe $\delta > 0$ con la propiedad de que

$$|\Delta F([t,c])| = |F(c) - F(t)| < \epsilon$$

siempre que $c - \delta < t < c$.

Existe una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a,b]$ correspondiente a $\epsilon > 0$ por la integrabilidad de $f$. Escojamos $\delta > 0$ de manera que $\beta$ contiene a todos los pares $([t,c],c)$ con $c - t < \delta$. Fijemos $t$ para el cual $c - \delta < t < c$. Como $f$ es integrable sobre cualquier subintervalo compacto de $[a,b]$, en particular lo es sobre $[a,t]$ y $[c,b]$. Sean $\pi_1$ y $\pi_2$ particiones de dichos subintervalos contenidas en $\beta \cap \beta_1$ y $\beta \cap \beta_2$ respectivamente, donde $\beta_1$ es cubierta de Cousin de $[a,t]$ y $\beta_2$ de $[c,b]$ correspondientes a $\epsilon/3$. Entonces

$$|S_{\pi_1}(f) - \Delta F([a,t])| < \epsilon/3 \qquad \text{y} \qquad |S_{\pi_2}(f) - F([c,b])| < \epsilon/3.$$

Para completar una partición del intervalo $[a,b]$ basta con agregar una pareja $([t,c],c)$. Definamos $\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup ([t,c],c)$, de manera que

$$S_\pi(f) = S_{\pi_1 \cup \pi_2}(f)$$

ya que $f(c) = 0$. Como $\pi$ es partición en $\beta$ sobre $[a, b]$, tenemos que

$$|S_{\pi_1 \cup \pi_2}(f) - F([a, b])| < \epsilon/3.$$

Por lo tanto, $c - \delta < t < c$ implica

$$\begin{aligned} |F(c) - F(t)| &\leqslant |F(c) - [F(b) + S_{\pi_2}(f)]| + |S_{\pi_2}(f) + F(b) - [F(a) + S_{\pi_1}(f)]| \\ &\quad + |S_{\pi_1}(f) + F(a) - F(t)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Similarmente se puede mostrar que $F$ es continua en $c$ por la derecha. Con un argumento similar se prueba que $F$ es continua en $a$ por la derecha y en $b$ por la izquiera. Por lo tanto, $F$ es continua. □

En la Sección 1.2 enunciamos el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann. En un curso ordinario de cálculo uno aprende a evaluar la integral de una función (que se conoce que es Riemann-integrable) encontrando una función $F$ tal que $F' = f$ y después evaluando $F(b) - F(a)$. La fórmula utlizada

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

es conocida como la fórmula de Newton-Leibniz. En esta sección veremos que se sigue aplicando en el contexto de la integración de Henstock-Kurzweil sin mayor dificultad. Más aún, como la derivada de una función siempre es HK-integrable, la situación es de hecho más sencilla para la HK-integral que para la integral de Riemann o incluso para la integral de Lebesgue.

En esta sección enunciaremos una versión de las dos partes del Teorema Fundamental del Cálculo a modo de comparación con las enunciadas en la Sección 1.2. El Capítulo 4 lo dedicaremos a la discusión detallada y cuidadosa de los aspectos del Teorema Fundamental del Cálculo relativo a la HK-integral, ofreciendo algunas comparaciones de éste entre las diferentes teorías de integración. Dichos aspectos comprenden las debilidades y fortalezas, ventajas y desventajas, entre otras cosas.

Primero establecemos algunas definiciones que usaremos a través de todo el trabajo subsecuente, especialmente en el Capítulo 4.

**Definición 1.64. a)** Si $P(x)$ es una proposición acerca del punto $x \in I$ y $E \subset I$ es un conjunto nulo, decimos que $P(x)$ se cumple *casi dondequiera sobre* $I$ ($P(x)$ c.d.) si $P(x)$ se verifica para $x \in I \backslash E$.

**b)** En b), si $E$ es un conjunto numerable (respectivamente, finito), decimos que $P(x)$ se cumple *excepto en un conjunto numerable* (respectivamente, *finito*). En tal caso escribimos $P(x)$ e.n. (respectivamente, $P(x)$ e.f.).

**Definición 1.65. a)** $F$ es una *primitiva* (o una antiderivada) *de* $f$ *sobre* $I$ si $F'(x)$ existe y $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in I$.

**b)** $F$ es una *d-primitiva* (respectivamente, *n-primitiva, f-primitiva*) *de* $f$ si $F$ es continua sobre $I$, y existe un conjunto nulo (respectivamente, numerable, finito) de puntos $x \in I$ donde $F'(x)$ no existe o no es igual a $f(x)$.

**Lema 1.66.** *(Definición alternativa de derivada) Sea $F : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $t \in I$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_t > 0$ tal que si $u \neq v$ satisfacen*

$$t - \delta_t < u \leqslant t \leqslant v < t + \delta_t$$

*entonces*

$$|F(v) - F(u) - F'(t)(v - u)| \leqslant \epsilon(v - u).$$

*Demostración.* Por definición de la derivada $F'(t)$ en $t$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_t > 0$ tal que si $|x - t| < \delta_t$ entonces

$$\left| \frac{F(x) - F(t)}{x - t} - F'(t) \right| < \epsilon,$$

lo que implica

$$|F(x) - F(t) - F'(t)(x - t)| < \epsilon |x - t|.$$

Si $u \leqslant t$ y $v \geqslant t$ están en este $\delta_t-$intervalo alrededor de $t$ entonces

$$
\begin{aligned}
|F(v)-F(u)-F'(t)(v-u)| &\leqslant |F(v)-F(t)-F'(t)(v-t)|+|F(u)-F(t)-F'(t)(u-t)| \\
&\leqslant \epsilon(v-t)+\epsilon(t-u)=\epsilon(v-u). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Enseguida veremos que la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo es significativamente más fuerte que aquella de la integral de Riemann. La derivada de alguna función automáticamente pertenece a la clase de las HK-integrables, como hemos venido comentando. De este modo, si una función $f$ tiene una primitiva, la integrabilidad de $f$ se vuelve una conclusión más que una hipótesis.

**Teorema 1.67.** *(Primera parte)*

*Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene una primitiva $F$ sobre $[a,b]$ entonces $f$ es HK-integrable y se cumple que*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$. Como $F$ es diferenciable en cada punto $t \in [a,b]$, para dicho punto $t$ escogemos $\delta_t$ como en el Lema 1.66 para formar una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a,b]$ con pares de la forma $([u,v],t)$ que satisfacen la conclusión del Lema.

Sea $\pi = \{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^n$ una partición contenida en $\beta$. Entonces se sigue por el lema que

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(t)(x_i - x_{i-1})| \leqslant \epsilon(x_i - x_{i-1}).$$

Como $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
|F(b)-F(a)-S_\pi(f)| &= \left|\sum_{i=1}^n [F(x_i)-F(x_{i-1})-f(t_i)(x_i-x_{i-1})]\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n |F(x_i)-F(x_{i-1})-f(t_i)(x_i-x_{i-1})| \\
&\leqslant \epsilon(b-a).
\end{aligned}
$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario concluimos que $f$ es HK-integrable con integral igual a $F(b) - F(a)$. $\square$

Siguiendo la idea del Ejemplo 1.18, veremos que podemos debilitar aún más las hipótesis, obteniendo una significativa mejora del teorema anterior. Por lo pronto, lo enunciamos sin demostración.

**Teorema 1.68.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene una $n-$primitiva $F$ sobre $[a, b]$ entonces $f$ es HK-integrable y se cumple que*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

A continuación damos un ejemplo importante, al cual estaremos haciendo referencia cuando discutamos la noción de integrabilidad absoluta.

**Ejemplo 1.69.** Sea $F$ definida por $F(x) = x^2 \cos(\pi/x^2)$ para $x \in (0, 1]$ y $F(0) = 0$. Vimos en el Ejemplo 1.7 que $F'$ existe en todos los puntos y por tanto es HK-integrable. Se tiene que $\int_0^1 F' = -1$. Sin embargo, probaremos que $|F'|$ no es HK-integrable.

*Demostración.* Supongamos que si lo es. Sean $a_k = 1/\sqrt{k+1}$ y $b_k = 1/\sqrt{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por el Corolario 1.37 y el Teorema 1.68 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} |F'| \geqslant \left| \int_{a_k}^{b_k} F' \right| &= |F(b_k) - F(a_k)| \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \geqslant \frac{2}{k+1}. \end{aligned}$$

Si $|F'|$ estuviese en $\mathcal{HK}([0, 1])$, tendríamos la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |F'| \leqslant \int_0^1 |F'|.$$

Dado que $n$ es arbitraria, la serie en el lado izquierdo diverge y por tanto $\int_0^1 |F'|$ también, lo cual es una contradicción. $\square$

En la segunda parte del TFC para la integral de Riemann, concluimos que si $F$ es la integral indefinida de $f$, entonces $F'(x) = f(x)$ en los puntos $x$ donde $f$ es continua. En esta sección vamos a probar la versión correspondiente a la HK-integral.

Por el momento, enfocaremos nuestra atención sobre la diferenciación de la integral indefinida en un punto específico $c \in [a, b]$.

**Teorema 1.70.** *(Segunda parte)*
*Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ HK-integrable y $F$ la integral indefinida de $f$. Si $f$ es continua por la derecha en un punto $c \in [a, b)$ entonces $F$ es derivable por la derecha en $c$ y $F'_+(c) = f(c)$.*

*Demostración.* Por la continuidad de $f$ en $c$, dado $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que

$$f(c) - \epsilon < f(t) < f(c) + \epsilon$$

para toda $t \in (c, c+h)$. Supongamos que $0 < h < \eta$. Como $f$ es HK-integrable sobre los subintervalos $[a, c]$, $[a, c + h]$ y $[c, c + h]$, tenemos que

$$F(c + h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Entonces por el Corolario 1.39

$$h\,(f(c) - \epsilon) \leqslant \int_c^{c+h} f \leqslant h\,(f(c) + \epsilon).$$

De aquí se sigue que

$$\left| \frac{F(c + h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leqslant \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario concluimos que

$$F'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} = f(c). \qquad \square$$

**Observación 1.71.** Con un argumento similar se prueba que si $f$ es continua por la izquierda en un punto $c \in (a, b]$ entonces $F$ es derivable por la izquierda en $c$ y $F'_{-}(c) = f(c)$.

En el capítulo dedicado al Teorema Fundamental del Cálculo mostraremos que $F$ es la integral indefinida de una función integrable si y sólo si $F$ es diferenciable casi dondequiera y satisface una condición adicional sobre el conjunto de excepción. Esta condición adicional se satisface si el conjunto es numerable.

### 1.10.1. Integración por partes

**Proposición 1.72.** *(Fórmula de integración por partes)*

*Sean $F, G$ funciones continuas sobre $[a, b]$. Si $F' = f$ y $G' = g$ excepto en un conjunto numerable, entonces*

$$\int_a^b (Fg + fG) = F(b)G(b) - F(a)G(a) \tag{1.9}$$

*Más aún, $Fg \in \mathcal{HK}([a, b])$ si y sólo si $fG \in \mathcal{HK}([a, b])$.*

*Demostración.* Dado que $FG$ es continua sobre $[a, b]$ y $(FG)' = Fg + fG$ excepto en un conjunto numerable, entonces la función $FG$ es una $n-$primitiva para $(FG)'$. Por el Teorema 1.68 tenemos que $(FG)' \in \mathcal{HK}([a, b])$ y la ecuación (1.8) se verifica.

Como $Fg + fG = (FG)' \in \mathcal{HK}([a, b])$, si una de las funciones $Fg$ o $fG$ es HK-integrable, entonces por la linealidad de la integral la otra también lo es. $\square$

La proposición anterior dice que si una de las integrales $\int_a^b Fg$ ó $\int_a^b fG$ existe, obtenemos la fórmula

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG.$$

El siguiente ejemplo muestra que en la Proposición 1.54 no podemos prescindir de la condición de que $f$ sea acotada por abajo.

**Ejemplo 1.73.** Sean $F(x) = x^2 \sin(1/x^4)$ y $G(x) = x^2 \cos(1/x^4)$ para $x \neq 0$ y $F(0) = G(0) = 0$. Note que para $x \neq 0$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x \sin(1/x^4) - \frac{4}{x^3} \cos(1/x^4) \\ G'(x) &= 2x \cos(1/x^4) + \frac{4}{x^3} \sin(1/x^4), \end{aligned}$$

de donde tenemos

$$\begin{aligned} FG'(x) &= 2x^3 \sin(1/x^4) \cos(1/x^4) + \frac{4}{x} \sin^2(1/x^4) \\ F'G(x) &= 2x^3 \sin(1/x^4) \cos(1/x^4) - \frac{4}{x} \cos^2(1/x^4). \end{aligned}$$

Usando las identidades trigonómetricas

$$\begin{aligned} \sin(2u) &= 2 \sin(u) \cos(u) \\ \sin^2(u) &= (1 - \cos(2u))/2 \\ \cos^2(u) &= (1 + \cos(2u))/2 \end{aligned}$$

y realizando algunos cálculos, obtenemos

$$F'(x)G(x) - F(x)G'(x) = \frac{4}{x}.$$

Como $1/x$ no es HK-integrable, entonces por la proposición anterior tampoco lo son $F'G$ y $FG'$.

Note que $F'$ es HK-integrable por ser una derivada, pero no es acotada por abajo; y $G$ es continua, pero $G'F$ no es HK-integrable.

**Observación 1.74.** La fórmula de integración por partes en el contexto de Riemann requiere que las derivadas sean Riemann-integrables, lo cual no es necesario para la HK-integral porque está implícito. Pero en contraste, la HK-integral requiere que los productos sean HK-integrables, lo cual no es necesario para la integral de Riemann.

Una pregunta surge de manera natural: ¿En qué sentido es más eficiente una teoría que la otra en la aplicación de la fórmula de integración por partes? Si bien es cierto que no es posible dar una respuesta definitiva, sí podemos compararlas desde dos perspectivas. La primera, sabiendo que la clase de funciones HK-integrables es mucho más grande que las Riemann-integrables; y la segunda, analizando la dificultad para probar que un producto de funciones es HK-integrable contra la hipótesis de que sea Riemann-integrable.

# Capítulo 2

# El Lema de Henstock e Integrabilidad absoluta

La teoría que desarrollamos en este capítulo tiene dos objetivos. El primero, introducir un criterio de integración muy importante, el Lema de Henstock. Como advertimos al comienzo de este trabajo, este lema es sumamente útil ya que nos ayuda a probar teoremas tales como el Teorema de Convergencia Monótona y el Teorema Fundamental del Cálculo en una parte.

La definición de la HK-integral de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ requiere que dado $\epsilon > 0$ exista una cubierta de Cousin $\beta$, tal que si $\pi \subset \beta$ es una partición etiquetada entonces $|S_\pi(f) - \int_a^b f| < \epsilon$. El Lema de Henstock asegura que tal aproximación a la integral $\int_a^b f$ es válida incluso si tomamos una subpartición en $\beta$. Más aún, garantiza que podemos intercambiar el símbolo de la suma por el valor absoluto.

Como una consecuencia del Lema de Henstock, incluimos una sección sobre integrales impropias. El Teorema de Hake nos muestra que no es necesario realizar tal "extensión", sin embargo, obtenemos un útil criterio para determinar la integrabilidad de una función cuando ésta se vuelve no acotada o altamente oscilatoria en la vecindad de un punto. También veremos un teorema que generaliza el Lema de Henstock en cierto sentido, permitiendo un manejo más sencillo de la definición de integrabilidad.

El segundo objetivo es analizar las propiedades de la clase de funciones HK-integrables que son absolutamente integrables y dar una caracterizacón de éstas en términos de su integral indefinida. Consideramos que es de suma importancia realizar esta exploración ya que hoy en día la teoría de integración mayormente aceptada es la establecida por Lebesgue a principios del siglo pasado, cuya definición implica de manera natural que es una integral absoluta. Entonces, estamos interesados en revisar las propiedades de las funciones $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ tales que $|f| \in \mathcal{HK}([a,b])$.

## 2.1. El Lema de Henstock

Recordemos que si $f$ es HK-integrable sobre $[a,b]$ y $F$ es una integral indefinida de $f$, tenemos la notación $\Delta F([c,d]) := F(d) - F(c)$ para cada $[c,d] \subset [a,b]$.

**Proposición 2.1.** *(Lema de Henstock) Sea $f$ una función de valores reales definida sobre un intervalo $[a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ si y sólo si existe una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a,b]$ con la propiedad de que*

$$\sum_{(I,x)\in\pi} |f(x)\ell(I) - \Delta F(I)| < \epsilon \tag{2.1}$$

*para cada subpartición $\pi$ contenida en $\beta$.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $f$ es HK-integrable sobre $[a,b]$ y sea $\epsilon > 0$. Sea $F$ la integral indefinida de $f$ y $\beta$ una cubierta de Cousin correspondiente a $\epsilon/2 > 0$ en la definición de integrabilidad.

Sea $\pi = \{(I_i, x_i)\}_{i=1}^n$ una subpartición contenida en $\beta$. Deseamos probar que la ecuación (2.1) se verifica. Sea $\eta > 0$ y completemos una partición de $[a,b]$ con los subintervalos cerrados $J_1, J_2, \dots, J_m$, de manera que $\{I_i\}_{i=1}^n \bigcup \{J_k\}_{k=1}^m = [a,b]$. Como $f$ es HK-integrable sobre $J_k$ $(k = 1, 2, \dots, m)$, existe una cubierta de Cousin $\beta_k$ de $J_k$ asociada a $\eta/m > 0$. De manera que si $\pi_k$ es una partición contenida en $\beta \cap \beta_k$ entonces

$$|S_{\pi_i}(f) - \Delta F(J_k)| < \eta/m, \qquad k = 1, 2, \dots, m.$$

Luego, $\pi' = \pi \cup \pi_1 \cup \cdots \cup \pi_m$ es una partición en $\beta$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\left| S_\pi(f) - \sum_{i=1}^n \Delta F(I_i) \right| &= \left| \left( S_{\pi'}(f) - \sum_{k=1}^m S_{\pi_k}(f) \right) - \left( \Delta F([a,b]) - \sum_{k=1}^m \Delta F(J_k) \right) \right| \\ &\leqslant |\, S_{\pi'}(f) - \Delta F([a,b])\,| + \sum_{k=1}^m |\, S_{\pi_k}(f) - \Delta F(J_k)\,| < \epsilon/2 + \eta.\end{aligned}$$

Como $\eta > 0$ es arbitrario, entonces

$$|S_\pi(f) - \sum_{i=1}^n \Delta F(I_i)| < \epsilon/2.$$

Note que esta diferencia se puede expresar como

$$\left| \sum_{i=1}^n \{f(x_i)\ell(I_i) - \Delta F(I_i)\} \right| = \left| \sum_{(I,x)\in\pi} \{f(t)\ell(I) - \Delta F(I)\} \right|.$$

Ahora bien, para esta misma subpartición $\pi$ en $\beta$ podemos tomar las subparticiones

$$\pi^+ = \{(I,x) \in \pi \,:\, [f(x)\ell(I) - \Delta F(I)] \geqslant 0\},$$
$$\pi^- = \{(I,x) \in \pi \,:\, [f(x)\ell(I) - \Delta F(I)] < 0\},$$

y aplicando lo probado anteriormente a $\pi^+$ y $\pi^-$ obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{(I,x)\in\pi} |f(x)\ell(I) - \Delta F(I)| &= \sum_{(I,x)\in\pi^+} [f(x)\ell(I) - \Delta F(I)] \\ &\quad + \sum_{(I,x)\in\pi^-} [\Delta F(I) - f(x)\ell(I)] < \epsilon.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una función $F$ con la propiedad de que para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a, b]$ tal que la ecuación (2.1) se cumple. Sea $\pi$ una partición contenida en $\beta$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\sum_{(I,x)\in\pi} f(x)\ell(I) - \Delta F([a,b])\right| &\leqslant \left|\sum_{(I,x)\in\pi} \{f(x)\ell(I) - \Delta F(I)\}\right| \\ &\leqslant \sum_{(I,x)\in\pi} |f(x)\ell(I) - \Delta F(I)| < \epsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ y su integral es $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. □

**Observación 2.2.** En la segunda parte del teorema es necesario que la función $F$ sea continua ya que es una integral indefinida de $f$.

**Corolario 2.3.** *Si $f \in \mathcal{HK}([a, b])$, entonces*

$$\left|\sum_{(I,x)\in\pi} \left(|f(x)|\ell(I) - \left|\int_I f\right|\right)\right| < \epsilon.$$

*para toda subpartición $\pi \subset \beta$.*

*Demostración.* La desigualdad del triángulo dice $\big|\,|A| - |B|\,\big| \leqslant |A - B|$. Tomando $A = f(x)\ell(I)$ y $B = \int_I f$ del Lema de Henstock y aplicando la Desigualdad del Triángulo término a término a la suma sobre los elementos en $\pi$, llegamos a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{(I,x)\in\pi} \left(|f(x)|\ell(I) - \left|\int_I f\right|\right)\right| &\leqslant \sum_{(I,x)\in\pi} \left||f(x)|\ell(I) - \left|\int_I f\right|\right| \\ &\leqslant \sum_{(I,x)\in\pi} \left|f(x)\ell(I) - \int_I f\right| < \epsilon.\end{aligned}$$

□

Ahora, usando el Lema de Henstock, probaremos que la integral indefinida de una función HK-integrable es continua.

**Corolario 2.4.** *Si $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ entonces la integral indefinida $F(x) = \int_a^x f$ es continua.*

*Demostración.* Procedamos como en la prueba de la Proposición 1.63. Deseamos verificar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(c) - F(t)| < \epsilon$$

siempre que $c - \delta < t < c$. Sea $\beta$ la cubierta de Cousin de $[a,b]$ correspondiente a $\epsilon/2 > 0$ y escogemos $\delta > 0$ tal que $\beta$ contiene a todos los pares $([t,c],c)$ con la propiedad de que $c - t < \delta$.

Para $t$ fijo, $c - \delta < t < c$, $\{([t,c],c)\}$ es una subpartición en $\beta$, y por el Lema de Henstock

$$|F(c) - F(t)| = \left| \int_t^c f \right| = \left| f(c)(c-t) - \int_t^c f \right| < \epsilon \qquad \square$$

### 2.1.1. Integrales impropias

Para integrar ciertas funciones que tienen límites infinitos en un punto $c \in [a,b]$, o bien, que son altamente oscilatorias en dicho punto, existe una técina en la teoría de integración de Riemann que permite extender la definición de integral tomando el límite de las integrales sobre subintervalos cuando los extremos de estos subintervalos tienden al punto $c$.

Por ejemplo, la función del Ejemplo 1.4 no es acotada sobre cualquier vecindad del 0, sin embargo, pertenece a $\mathcal{R}([\epsilon,1])$ para todo $\epsilon > 0$ ya que la función es continua en el intervalo $[\epsilon,1]$. En tal caso, uno define la *integral impropia* de $f$ sobre $[0,1]$ como el límite

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Se hace una definición similar cuando el punto de dificultad está en el extremo derecho del intervalo de integración.

En general, si uno trabaja con una función $f$ que se vuelve no acotada o altamente oscilatoria cerca de un punto $c \in (a,b)$, entonces se define la *integral de Riemann impropia* de $f$ como

$$\int_a^b f := \lim_{\epsilon \to c^-} \int_a^\epsilon f + \lim_{\epsilon \to c^+} \int_\epsilon^b f.$$

Si ambos límites existen decimos que $f$ es *Riemann impropiamente integrable*, $f \in \mathcal{RI}(I)$.

La integral de Lebesgue es deficiente en este sentido. La integral de Riemann generaliza a las funciones Riemann impropiamente integrables, sin embargo, no toda función en $\mathcal{RI}(I)$ es Lebesgue integrable. Veremos un ejemplo de esto al final de la sección.

Ahora probaremos un resultado establecido por Heinrich Hake en 1921 para la integral de Perron. Este teorema asegura que no se puede extender la HK-integral a una "integral impropia", es decir, si una función tiene una integral impropia entonces debe ser integrable en el sentido común.

**Teorema 2.5.** *(Teorema de Hake) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ si y sólo si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $c \in (a,b)$ la restricción de $f$ a $[a,c]$ pertenece a $\mathcal{HK}([a,c])$ y*

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f = A. \tag{2.2}$$

*En este caso, $\int_a^b f = A$.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Si $c \in (a,b)$, por la Proposición 1.41 tenemos que la restricción de $f$ a $[a,c]$ es HK-integrable. Además, por el Corolario 2.4 la integral indefinida de $f$ es continua en $b$ y por tanto se verifica la igualdad

$$\int_a^b = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f$$

Por lo tanto, tomando $A = \int_a^b f$ la prueba de la parte necesaria está completa.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $A \in \mathbb{R}$ tal que las hipótesis del teorema se cumple. Sea $\{c_n\}$ una sucesicón estrictamente creciente tal que $a = c_0$ y $b = \text{lím}_n\, c_n$.

Sea $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$b - c_k \leqslant \frac{\epsilon}{|f(b)| + 1} \tag{2.3}$$

y si $t \in [c_k, b)$ entonces

$$\left| \int_a^t f - A \right| \leqslant \epsilon. \tag{2.4}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\beta_n$ una cubierta de Cousin de $[c_{n-1}, c_n]$ anclada sobre los puntos $\{c_{n-1}, c_n\}$ (Ver Observación 1.33) tal que si $\pi_n \subset \beta_n$ entonces

$$\left| S_{\pi_n}(f) - \int_{c_{n-1}}^{c_n} f \right| \leqslant \frac{\epsilon}{2^n} \tag{2.5}$$

Para el punto $b$, sea $\delta_b = b - c_k$. Definamos la relación de cobertura $\beta_b$ como el conjunto de todos los pares $\{([x, y], b)\}$ tales que $y - x < \delta_b$.

Entonces, $\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n \bigcup \beta_b$ es una cubierta de Cousin de $[a, b]$.

Sea $\pi = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{m}$ contenida en $\beta$. Note que el intervalo $[x_{m-1}, b]$ debe tener etiqueta $t_m = b$. Esto se puede ver como sigue: $b$ no pertenece a ningún intervalo $[c_{n-1}, c_n]$. Si $t_m \neq b$, tendríamos que $t_m$ cae en algún intervalo $[c_{n-1}, c_n]$ de donde la etiqueta debe ser $t_m = c_{n-1}$ o $t_m = c_n$. Como

$$\delta(t_m) < \min\{c_n - t_m, t_m - c_{n-1}\}$$

tendríamos que $b$ no pertenece al intervalo $[x_{m-1}, b]$ lo cual es una contradicción.

Ahora bien, dado que $\pi \subset \beta$ entonces

$$b - x_{m-1} < \delta_b,$$

es decir, $c_k < x_{m-1}$.

Sea $s \in \mathbb{N}$ el mínimo entero positivo tal que $x_{m-1} \leqslant c_s$. Luego, como $\{c_n\}$ es estrictamente creciente entonces $k < s$.

Si $n = 1, 2, \ldots, s-1$ entonces el hecho de que las cubiertas $\beta_n$ estén ancladas en $\{c_{n-1}, c_n\}$ implica que el punto $c_n$ debe ser etiqueta para algún subintervalo en $\pi$ que contiene a $c_n$. Hacemos la partición $\pi$ más fina añadiendo algunos puntos de manera que $c_0, c_1, \ldots, c_{s-1}$ son extremos de intervalos en $\pi$.

Para cada $n = 1, 2, \ldots, s-1$, sea

$$\pi_n = \pi \cap [c_{n-1}, c_n]$$

y

$$\pi_s = \pi \cap [c_{s-1}, x_{m-1}].$$

Cada $\pi_n \subset \beta_n$ y entonces la ecuación (2.5) se satisface para cada $n = 1, 2, \ldots, s-1$.

Además ,como $\pi_s$ es una subpartición contenida en $\beta_s$, el Lema de Henstock implica que

$$\left| S_{\pi_s}(f) - \int_{c_{s-1}}^{x_{m-1}} f \right| \leqslant \frac{\epsilon}{2^s}.$$

Si $\pi_b := \{([x_{m-1}, b], b)$ entonces $S_{\pi_b}(f) = f(b)(b - x_{m-1})$ y por tanto la ecuación (2.3) implica

$$|S_{\pi_b}(f)| = |f(b)|(b - x_{m-1}) < |f(b)|(b - x_{m-1}) \leqslant \epsilon \frac{|f(b)|}{|f(b)|+1} < \epsilon.$$

Como $\pi = \pi_1 \cup \cdots \cup \pi_s \cup \pi_b$ está contenida en $\beta$, tenemos que

$$\begin{aligned} |S_\pi(f) - A| &= |\sum_{i=1}^{s} S_{\pi_i}(f) + S_{\pi_b}(f) - A| \\ &\leqslant \left| \sum_{i=1}^{s} S_{\pi_i}(f) - \int_a^{x_{m-1}} f \right| + \left| \int_a^{x_{m-1}} f - A \right| + |S_{\pi_b}(f)| \\ &\leqslant 3\epsilon. \end{aligned}$$

Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ con integral $A$. $\square$

**Observación 2.6.** Por el Teorema de Hake, la clase $\mathcal{HK}(I)$ incluye a la clase $\mathcal{RI}(I)$. Además, la contención es propia ya que la función del Ejemplo 1.6 no está en $\mathcal{RI}([0,1])$ pero sí en $\mathcal{HK}([0,1])$.

Podemos obtener algunas conclusiones a partir del Teorema de Hake:

- La HK-integral no necesita ser generalizada tomando límites como en la ecuación (2.2).
- Se puede usar este teorema como un criterio de integrabilidad sobre un intervalo $[a,b]$ analizando su comportamiento sobre subintervalos de $[a,b]$.

Concluiremos esta sección mostrando que toda serie convergente define una función HK-integrable.

**Proposición 2.7.** *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de números reales que converge a $A \in \mathbb{R}$. Construiremos una función $h \in \mathcal{HK}([0,1])$ tal que*

$$\int_0^1 h = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A. \tag{2.6}$$

*Demostración.* Sea $c_n := 1 - 1/2^n$ para cada $n = 0, 1, \ldots,$ y definimos la función $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ (Ver Figura 2.1) por

$$h(x) := \begin{cases} 2^k a_k & x \in [c_{k-1}, c_k),\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

Entonces $h$ toma los valores $2a_1, 2^2 a_2, 2^3 a_3, \ldots$ sobre los subintervalos

$$[0, 1/2), [1/2, 3/4), [3/4, 7/8), \ldots$$

Para cada $c \in (0,1)$, la restricción de $h$ a cada intervalo $[0,c]$ es una función escalonada y por el Corolario 1.45 es HK-integrable. Si $c \in [c_{k-1}, c_k)$,

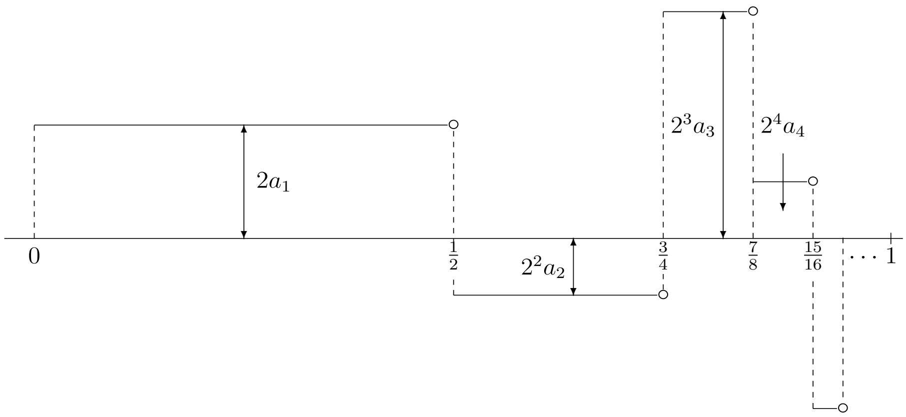


Figura 2.1: Gráfica de la función $h$

la integral es

$$\begin{aligned}\int_0^c h &= 2a_1(c_1 - c_0) + \cdots + 2^{k-1}a_{k-1}(c_{k-1} - c_{k-2}) + 2^k a_k(c - c_{k-1}) \\ &= 2a_1(1/2) + \cdots + 2^{k-1}a_{k-1}(1/2^{k-1}) + 2^k a_k(c - c_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} a_i + 2^k a_k(c - c_{k-1}).\end{aligned}$$

Pero como $(c - c_{k-1}) < 1/2^k$, debemos tener

$$|2^k a_k(c - c_{k-1})| \leqslant |a_k|$$

y dado que $a_k \to 0$, entonces también el lado izquierdo. Esto implica que

$$\lim_{c \to 1^-} \int_0^c h = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k = A.$$

Por el Teorema de Hake, $h \in \mathcal{HK}([0,1])$ con integral $\int_0^1 h = A$. $\square$

**Observación 2.8.** Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente, entonces se sigue que la función $|h| \in \mathcal{HK}([0,1])$ y que

$$\int_0^1 |h| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Sin embargo, si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ no es convergente, entonces $|h|$ no está en $\mathcal{HK}([0,1])$. Este hecho nos sirve para probar que algunas funciones no son HK-integrables, como lo ilustramos en el Ejemplo 1.69.

También podemos concluir que las series que convergen condicionalmente definen (como antes) una función Riemann impropiamente integrable que no es absolutamente integrable.

### 2.1.2. Generalización del Lema de Henstock

En esta sección veremos otra caracterización de las funciones HK integrables. En el Ejemplo 1.18 y en la Proposición 1.30 se aprovechó la flexibilidad de las cubiertas de Cousin al cubrir un conjunto numerable de puntos con intervalos arbitrariamente pequeños para probar la integrabilidad de ciertas funciones. Muchos de los resultados se pueden generalizar permitiendo conjuntos de excepción numerables usando esta propiedad. Para evitar hacer esta observación en cada ocasión, Výborný define el concepto de "gauge numerablemente cerrado" en su reciente artículo [10]. Nosotros retomamos esta noción y la llevamos al lenguaje de relaciones de cobertura.

**Definición 2.9.** Una relación de cobertura $\beta$ es una *cubierta de Cousin numerablemente cerrada (n.c.) de* $[a,b]$ si existe un conjunto numerable $C$ (incluyendo conjuntos finitos y el vacío) tal que para cada $x \in [a,b] \backslash C$, existe $\delta_x > 0$ con la propiedad de que $\beta$ contiene todos los pares $([c,d],x)$ para los cuales $x \in [c,d] \subset [a,b]$ y $d - c < \delta_x$.

**Observación 2.10.**

**i)** Si $\beta$ es una cubierta de Cousin de $[a,b]$ entonces es una cubierta de Cousin n.c. de $[a,b]$.

**ii)** Una subpartición $\pi = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}$ en $\beta$ satisface que $t_i \in [a,b]\backslash C$.

**Teorema 2.11.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ si y sólo si existe una función continua $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta de Cousin n.c $\beta$ con la propiedad de que*

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| < \epsilon$$

*para cada subpartición $\pi = \{([x_i, x_{i-1}], t_i)\}_{i=1}^{n}$ contenida en $\beta$.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Si $f$ es HK-integrable y $F$ la integral indefinida de $f$, entonces la necesidad se satisface por el Lema de Henstock.

($\Leftarrow$) Supongamos que las condiciones del teorema se satisfacen con $\beta$ correspondiente a $\epsilon/2 > 0$, donde el conjunto de excepciones es $C = \{r_1, r_2, \ldots\}$.

Por la continuidad de $F$, para cada $n$ existe $\delta_{r_n} > 0$ tal que

$$|F(v) - F(u)| < \frac{\epsilon}{2^{n+2}} \quad \text{y} \quad |f(r_n)(v-u)| < \frac{\epsilon}{2^{n+2}}$$

para $|r_n - v| < \delta_{r_n}$ y $|v - r_n| < \delta_{r_n}$.

Ahora bien, si añadimos a $\beta$ los pares $([u,v], r_n)$ donde $u, v$, y $r_n$ están relacionados como antes, entonces $\beta$ es una cubierta de Cousin de $[a,b]$. Sea $\pi = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ una subpartición en $\beta$. Si $t_i = c_{k_i} \in C$ es una etiqueta de algún subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_{k_i})(x_i - x_{i-1})| \leqslant \frac{\epsilon}{2^{k_i+1}}$$

y como cada $t_i \in C$ puede ser etiqueta de a lo más dos subintervalos de $\pi$, tenemos que

$$\sum_{t_i \in \mathcal{C}} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leqslant \sum_{t_i \in \mathcal{C}} \frac{2\epsilon}{2^{k_i+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Por otro lado, por el Lema 1.66, la suma de los términos con etiqueta $t \notin \mathcal{C}$ satisface que es $\leqslant \epsilon(b-a)$. Por consecuencia,

$$|F(b)-F(a)-S_\pi(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |F(x_i)-F(x_{i-1})-f(t_i)(x_i-x_{i-1})| \leqslant \epsilon(1+b-a)$$

para cualquier subpartición $\pi$ contenida en $\beta$. Esto prueba que $f$ es HK-integrable con integral $F(b)-F(a)$. $\square$

**Observación 2.12.** Con este resultado la Proposición 1.30 es inmediata.

## 2.2. Integrabilidad absoluta

En esta sección introducimos la clase de las funciones “absolutamente integrables sobre $[a, b]$”, constituida por las funciones $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ tales que $|f| \in \mathcal{HK}([a, b])$. En el capítulo 1 dimos un ejemplo de una función que es HK-integrable pero tal que su valor absoluto no lo es (Ejemplo 1.69).

**Definición 2.13.** Si $f \in \mathcal{HK}(I)$, decimos que $f$ es *absolutamente integrable* si $|f| \in \mathcal{HK}(I)$. A la colección de todas las funciones absolutamente integrables sobre $I$ la denotaremos por $\mathcal{L}(I)$.

En esta sección vamos a dar una caracterización de las funciones absolutamente integrables mediante una condición sobre su integral indefinida. Resulta que las funciones en $\mathcal{L}(I)$ son aquellas cuya integral indefinida no “oscila mucho”. Para determinar en qué sentido decimos esto daremos un ejemplo. Una vez dada la caracterización, veremos un criterio para determinar la pertenencia de una función a la clase $\mathcal{L}(I)$.

### 2.2.1. Funciones de variación acotada

**Definición 2.14.** Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Definimos la *variación de $F$ sobre $[a, b]$* como

$$\mathrm{Var}_a^b F := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \ : \ \mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^{n} \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\mathcal{P}$ de $[a, b]$.

Si $\mathrm{Var}_a^b F < \infty$ decimos que $F$ es de *variación acotada*. La clase de todas las funciones de variación acotada sobre $[a, b]$ la denotamos por $BV([a, b])$.

**Ejemplo 2.15.** Sean $F_1, F_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones monónotas y $F := F_1 \pm F_2$. Sea $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a, b]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leqslant |F_1(b) - F_1(a)| + |F_2(b) - F_2(a)|.$$

Dado que la suma en el lado izquierdo está acotada para $\mathcal{P}$ arbitraria, entonces $F$ es de variación acotada.

Las funciones de variación acotada tienen muchas propiedades interesantes, una de ellas es la siguiente: si $F \in BV([a, b])$ y $c \in (a, b)$ entonces

$$\mathrm{Var}_a^b F = \mathrm{Var}_a^c F + \mathrm{Var}_c^b F. \tag{2.7}$$

Primero veremos que $\mathrm{Var}_a^b F \leqslant \mathrm{Var}_a^c F + \mathrm{Var}_c^b F$. Sea $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a, b]$ y supongamos que $c \in [x_{k-1}, x_k]$. Entonces

$$|F(x_k) - F(x_{k-1})| \leqslant |F(x_k) - F(c)| + |F(c) - F(x_{k-1})|$$

y obtenemos la desigualdad deseada.

Por otro lado, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar particiones $\mathcal{P}_1 = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a, c]$ y $\mathcal{P}_2 = \{y_i\}_{i=0}^{m}$ de $[c, b]$ tales que

$$\mathrm{Var}_a^c F - \epsilon < \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}_c^b F - \epsilon < \sum_{i=1}^{m} |F(y_i) - F(y_{i-1})|.$$

Luego

$$\sum_{\mathcal{P}_1\bigcup\mathcal{P}_2}|\Delta F|=\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{m}|F(y_i)-F(y_{i-1})|>\mathrm{Var}_a^cF+\mathrm{Var}_c^bF-2\epsilon$$

y tomando supremos obtenemos $\mathrm{Var}_a^bF \geqslant \mathrm{Var}_a^cF + \mathrm{Var}_c^bF - 2\epsilon$. Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario obtenemos la otra desigualdad.

También, se puede probar de manera sencilla que la suma o diferencia de dos funciones que tienen variación acotada es de variación acotada. Recíprocamente tenemos la siguiente

**Proposición 2.16.** *Si $F \in BV([a,b])$ entonces existen funciones crecientes sobre $[a,b]$, $F_1$ y $F_2$, tal que $F = F_1 - F_2$.*

*Demostración.* Tomemos $F_1(x) =\mathrm{Var}_a^xF$ para $a < x \leqslant b$, $F_1(a) = 0$ y $F_2(x) = F_1(x) - F(x)$. Es claro que $F_1$ es creciente. Basta mostrar que $F_2$ también lo es. Para ello tomemos $x, y$, $a \leqslant x < y \leqslant b$. Luego

$$F_2(y) = F_1(y) - F(y) = F_1(x) + \mathrm{Var}_x^yF - F(y).$$

De aquí que

$$F_2(y) - F_2(x) = \mathrm{Var}_x^yF - [F(y) - F(x)] \geqslant 0 \qquad \square$$

Otra propiedad importante de las funciones de variación acotada es la siguiente: si $F \in BV([a,b])$ entonces $F$ es acotada en $[a,b]$. De hecho, $|F(x)| \leqslant |F(a)| + \mathrm{Var}_a^bF$ para cada $x \in [a,b]$. Para comprobar esto, tomemos la partición $\mathcal{P} = \{a,x,y,b\}$ del intervalo $[a,b]$. Entonces, por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$|F(x) - F(a)| + |F(y) - F(x)| + |F(b) - F(y)| \leqslant \mathrm{Var}_a^bF.$$

Luego

$$|\,|F(x)| - |F(a)|\,| \leqslant |F(x) - F(a)| \leqslant \mathrm{Var}_a^bF,$$

lo cual implica que

$$|F(x)| \leqslant |F(a)| + \mathrm{Var}_a^bF.$$

### 2.2.2. Caracterización de integrabilidad absoluta

Mostraremos que las funciones absolutamente integrables son precisamente aquellas cuya integral indefinida tiene variación acotada.

**Teorema 2.17.** *(Caracterización de integrabilidad absoluta)*

*Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$. Entonces $f$ es absolutamente integrable sobre $[a,b]$ si y sólo si la integral indefinida $F(x) = \int_a^x f$ tiene variación acotada sobre $[a,b]$. En este caso,*

$$\int_a^b |f| = Var_a^b F$$

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Para la primera parte, si $|f| \in \mathcal{HK}([a,b])$ y $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^n$ es una partición de $[a,b]$ entonces

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right| \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f| = \int_a^b |f|$$

La ecuación anterior indica que las sumas en el lado izquierdo están acotadas, por lo tanto $\mathrm{Var}_a^b F < \infty$.

($\Leftarrow$) Para la segunda parte, utilizaremos el Lema de Henstock y la noción de una cubierta anclada sobre un conjunto finito que discutimos en la Observación 1.33.

Supongamos que $F \in BV([a,b])$. Dado $\epsilon > 0$, encontramos una partición $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^n$ de $[a,b]$ tal que

$$\mathrm{Var}_a^b F - \epsilon \leqslant \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leqslant \mathrm{Var}_a^b F. \tag{2.8}$$

Note que la ecuación anterior también se cumple para una partición más fina que $\mathcal{P}$. Esto es fácil de ver por la desigualdad del triángulo y recordando que $\mathrm{Var}_a^b f$ es el supremo.

Ahora bien, sea $\beta_1$ una cubierta de Cousin asociada a la $\epsilon/2 > 0$ dada, correspondiente a la definición de integrabilidad de $f$. Por el Corolario 2.3

concluimos que

$$\left| S_\pi(|f|) - \sum_{(I,t)\in\pi} \left| \int_I f \right| \right| \leqslant \epsilon, \qquad \forall\, \text{subpartición}\, \pi \subset \beta_1. \tag{2.9}$$

Sea también $\beta_2$ una cubierta de $[a,b]$ anclada sobre $\mathcal{P}$. Considere la cubierta de Cousin $\beta = \beta_1 \cap \beta_2$. Entonces, cualquier partición $\pi$ en $\beta$ lo es también en $\beta_1$ y la ecuación (2.9) se sigue cumpliendo. También, $\pi$ estará en $\beta_2$, lo que implica que todos los puntos $x_i \in \mathcal{P}$ son etiquetas de al menos un subintervalo en $\pi$.

Sea entonces $\pi \subset \beta$. Agregamos un número finito de puntos a la partición de manera que las etiquetas $x_i \in \mathcal{P}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, sean etiquetas para dos subintervalos. La ecuación (2.8) se sigue verificando para esta nueva partición ya que es más fina.

Entonces, si denotamos por $(J_i, \tau_i)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ a los elementos en $\pi$, tenemos que

$$\mathrm{Var}_a^b F - \epsilon \leqslant \sum_{i=1}^m |\Delta F(J_i)| = \sum_{i=1}^m \left| \int_{J_i} f \right| \leqslant \mathrm{Var}_a^b F. \tag{2.10}$$

Combinando las últimas dos ecuaciones obtenemos

$$|S_\pi(|f|) - \mathrm{Var}_a^b F| \leqslant \left| S_\pi(|f|) - \sum_{i=1}^m \left| \int_{J_i} f \right| \right| + \left| \sum_{i=1}^m \left| \int_{J_i} f \right| - \mathrm{Var}_a^b F \right| \leqslant 2\epsilon. \quad \square$$

**Observación 2.18.** La primera parte de la prueba es completamente equivalente a la prueba de que si $f$ es Lebesgue integrable entonces su integral indefinida es de variación acotada, la cual se puede ver en [4]. Esto tiene sentido ya que la integral de Lebesgue es una integral absoluta y las propiedades de monotonía y aditividad de la integral son válidas en ambos contextos, para la de Lebesgue y la de Hentock-Kurzweil.

En el Ejemplo 1.69 usamos el Teorema Fundamental del Cálculo para ver que $F'$ no es absolutamente integrable sobre $[0,1]$ para la función ahí definida. Ahora daremos otra prueba mostrando que $F$ no tiene variación acotada sobre $[0,1]$ y como ésta es la integral indefinida de $F'$, usando el teorema anterior concluiremos que $|F'| \notin \mathcal{HK}([0,1])$.

**Ejemplo 2.19.** Sea $F(x) = x^2 \cos(\pi/x^2)$ para $x \in (0,1]$ y $F(0) = 0$. Entonces $F$ no es de variación acotada:

$$F'(x) = 2x\cos(\pi/x^2) + (2\pi/x)\sin(\pi/x^2), \quad x \in (0,1],$$

y $F'(0) = 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Considere la partición de $[0,1]$ dada por

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/\sqrt{n}, \quad x_2 = 1/\sqrt{n-1}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = 1/\sqrt{2}, \quad x_n = 1.$$

Entonces $F(x_k) = (-1)^{n-k+1}/(n-k+1)$, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Luego se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| &= |F(x_1) - F(x_0)| + |F(x_2) - F(x_1)| + \cdots + |F(x_n) - F(x_{n-1})| \\
&= \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

La suma entre paréntesis diverge, entonces la suma al lado izquierdo es arbitrariamente grande y por lo tanto $F \notin BV([0,1])$.

El siguiente criterio es una herramienta muy práctica para establecer la integrabilidad absoluta de una función.

**Proposición 2.20.** *(Criterio de comparación para integrabilidad absoluta) Si $f$ y $g$ están en $\mathcal{HK}(I)$ y $|f| \leqslant g$, entonces $f \in \mathcal{L}(I)$.*

*Demostración.* Si $F(x) = \int_a^x f$ y $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^n$ es una partición de $I$, entonces por la Monotonía de la integral tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g = \int_a^b g,$$

de donde concluimos que $\mathrm{Var}_a^b F \leqslant \int_a^b g < \infty$, lo que implica que $f$ es absolutamente integrable sobre $I$. □

## 2.2.3. Propiedades de funciones en $\mathcal{L}(I)$

Es mucho lo que se puede decir acerca de esta clase de funciones, pero en este trabajo nos restringiremos a aquellos resultados que nos servirán para probar los teoremas de convergencia y el TFC.

**Corolario 2.21.** *Si $f, g \in \mathcal{L}(I)$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{L}(I)$.*

*Demostración.* Como $|f|, |g|$ son HK-integrables, por la linealidad de la integral se sigue que $|c_1||f| + |c_2||g|$ es HK-integrable. Dado que

$$|c_1 f + c_2 g| \leqslant |c_1||f| + |c_2||g|,$$

el criterio 2.20 nos da la conclusión del corolario. □

**Corolario 2.22.** *Sean $f, g \in \mathcal{L}(I)$. Entonces min$\{f, g\}$ y max$\{f, g\}$ están en $\mathcal{L}(I)$.*

*Demostración.* Basta notar que

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|],$$
$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|].$$

La integrabilidad de las funciones se sigue de la integrabilidad absoluta de $f$ y $g$, y de aplicar en cada caso el corolario anterior. □

**Corolario 2.23.** *Sean* $f, g, \alpha, \omega \in \mathcal{HK}(I)$.

**a)** *Si* $f \leqslant \alpha$ *y* $g \leqslant \alpha$, *entonces max*$\{f, g\}$ *y min*$\{f, g\}$ *están en* $\mathcal{HK}(I)$.

**b)** *Si* $\omega \leqslant f$ *y* $\omega \leqslant g$, *entonces max*$\{f, g\}$ *y min*$\{f, g\}$ *están en* $\mathcal{HK}(I)$.

*Demostración.* a) Tenemos que $\max\{f, g\} \leqslant \alpha$. Ahora, por como expresamos el máximo en el Corolario 2.22

$$0 \leqslant |f - g| = 2\text{Máx}\{f, g\} - [f + g] \leqslant 2\alpha - [f + g].$$

La función al lado derecho es HK-integrable. Entonces, por el Criterio de comparación, $f - g$ es absolutamente integrable; es decir, $|f - g|$ es HK-integrable. Ahora es claro que $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son HK-integrables.

b) Tenemos que $-f \leqslant -\omega$ y $-g \leqslant -\omega$. Entonces por la parte a), $\max\{-f, -g\}$ y $\min\{-f, -g\}$ están en $\mathcal{HK}(I)$. Pero

$$\max\{-f, -g\} = -\min\{f, g\} \quad \text{y} \quad \min\{-f, -g\} = -\max\{f, g\}.$$

y por lo tanto $\text{Min}\{f, g\}$ y $\text{Max}\{f, g\}$ son HK-integrables. □

### 2.2.4. Continuidad absoluta

Hay otra caracterización de la integrabilidad absoluta usando la clase de funciones absolutamente continuas.

**Definición 2.24.** Una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *absolutamente continua sobre* $[a, b]$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que si $\{[u_i, v_i]\}_{i=1}^n$ es una subpartición de $[a, b]$ con la propiedad de que

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i) < \eta,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |F(v_i) - F(u_i)| < \epsilon.$$

A la clase de funciones absolutamente continuas sobre $[a, b]$ la denotamos por $AC([a, b])$.

En los siguientes resultados estableceremos algunas propiedades de esta clase de funciones.

**Proposición 2.25.** *Si $f \in AC([a, b])$ entonces $f$ es uniformemente continua sobre $[a, b]$.*

*Demostración.* Por definición de continuidad absoluta para $f$, dado $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que si $u, v \in [a, b]$ y $|v - u| < \eta$, entonces $|f(v) - f(u)| < \epsilon$. $\square$

El siguiente ejemplo exhibe una función creciente y uniformemente continua sobre $[0, 1]$, pero que no es absolutamente continua. Su gráfica es usualmente conocida como "la escalera del diablo". Antes, recordemos la contrucción del conjunto de Cantor:

Sea $I = [0, 1]$. Obtenemos $C_1$ removiendo la tercera parte abierta del centro de $I$, esto es,
$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, 1].$$
Enseguida, removemos las terceras partes abiertas de los dos intervalos anteriores en $C_1$ obteniendo
$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$
Inductivamente, $C_n$ consiste de $2^n$ subintervalos cerrados de $I$ de longitud $1/3^n$. El *conjunto de Cantor* es el conjunto $\mathcal{C} := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Se puede probar que $\mathcal{C}$ *es un conjunto nulo no numerable* ([8] p. 97-98).

**Ejemplo 2.26.** (Función de Cantor-Lebesgue)

Construimos la función de Cantor-Lebesgue $H : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como sigue: sea $H(0) = 0$ y $H(1) = 1$. Para $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ tomemos $H(x) = 1/2$. Luego, para $x \in (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ tomemos $H(x) = 1/4$. En general, si $J \subset [0, 1]$ es un intervalo

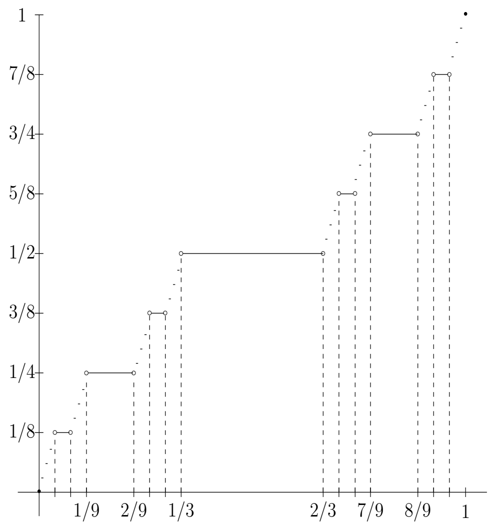


Figura 2.2: Construcción de la función de Cantor-Lebesgue.

del complemento del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ y $z$ es su punto medio, entonces $H(x) = z$ para $x \in J$ (Ver Figura 2.2). Extendemos $H$ a los puntos en el conjunto de Cantor tomando

$$H(x) = \sup\{H(t) \,:\, t \leqslant x, t \notin \mathcal{C}\}.$$

Es claro, por construcción, que la función $H$ es creciente. Además, $H$ es uniformemente continua: $H$ toma los valores de la forma $\frac{k}{2^n}$ con $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant 2^n$, y es constante sobre todo intervalo removido del conjunto $I$. Dado $\epsilon > 0$, sea $n$ tal que $1/2^n < \epsilon$. Luego, escogemos $\delta = 1/3^n$ de manera que si $|v - u| < \delta$ entonces $|H(v) - H(u)| < \epsilon$.

Ahora probaremos que $H \notin AC([0,1])$. Sea $\epsilon = 1$. Sea $\{[u_i, v_i]\}_{i=1}^{2^n}$ una subpartición de $[0,1]$ que consiste de los $2^n$ subintervalos cerrados en $C_n$. La longitud total de estos es $(2/3)^n$, la cual tiende a cero cuando $n \to \infty$. Entonces para toda $\delta > 0$ podemos encontrar $n$ suficientemente grande tal que $(2/3)^n < \delta$. Dado que $H$ es creciente, concluimos que

$$\sum_{i=1}^{2^n} H(v_i) - H(u_i) = H(1) - H(0) = 1.$$

**Proposición 2.27.** *Si $f \in AC([a,b])$, entonces $f \in BV([a,b])$.*

*Demostración.* Sea $\eta > 0$ la correspondiente en la definición de continuidad absoluta para $\epsilon = 1$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > (b-a)/\eta$ . Dividamos $[a,b]$ en $N$ subintervalos disjuntos $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud menor que $(b-a)/N < \eta$. Entonces $\mathrm{Var}_{x_{i-1}}^{x_i} f < 1$ para cada $i = 1, 2, \ldots, N$. Luego, por (2.7)

$$\mathrm{Var}_a^b f = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Var}_{x_{i-1}}^{x_i} f < N. \qquad \square$$

**Observación:** la función de Cantor-Lebesgue en el Ejemplo 2.26 es una función de variación acotada en $[0,1]$ ya que es creciente; sin embargo, acabamos de ver que no es absolutamente continua en $[0,1]$. Por tanto, el recíproco en la proposición anterior es falso.

**Proposición 2.28.** *Si $f, g \in AC(I)$ entonces las funciones $cf, |f|, f \pm g, fg$ están en $AC(I)$.*

*Demostración.* Es claro que la función $cf$ está en $AC(I)$. Para el resto, basta notar para cada caso las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\big|\,|f(v)| - |f(u)|\,\big| &\leqslant |f(v) - f(u)|. \\
|(f(v) \pm g(v)) - (f(u) \pm g(u))| &\leqslant |f(v) - f(u)| + |g(v) - g(u)|. \\
|f(v)g(v) - f(u)g(u)| &\leqslant |f(v) - f(u)||g(v)| + |g(v) - g(u)||f(u)|.
\end{aligned}$$

La conclusión la obtenemos a partir de la continuidad absoluta de las funciones $f$ y $g$ y de que están acotadas en el intervalo $I$ por ser de variación acotada. $\square$

El siguiente lema es una variación de un resultado en teoría de la medida respecto a las funciones Lebesgue integrables (Ver [4] p. 88). En la prueba usamos el Teorema de Convergencia Monótona 3.7, que se enuncia y prueba en el siguiente capítulo.

**Lema 2.29.** *Sea* $f \in \mathcal{L}(I)$. *Entonces, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *con la propiedad de que si* $\{I_j\}_{j=1}^m$ *es una subpartición de* $I$ *tal que* $\sum_{j=1}^m \ell(I_j) < \delta$ *entonces*

$$\int_{\bigcup_j I_j} |f| < \epsilon.$$

*Demostración.* Si $f$ es acotada, el Corolario 1.39 nos da la conclusión del lema. Supongamos ahora el caso general. Sea $g(x) := |f(x)|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} g(x) & g(x) \leqslant n \\ n & g(x) > n. \end{cases}$$

Entonces la sucesión $f_n$ es creciente y $g(x) = \operatorname{lím}_n f_n(x)$ para cada $x \in I$. Note que podemos expresar la función $f_n$ como

$$f_n = \max\{\min\{g, n\}, 0\}.$$

Dado que $f$ es absolutamente integrable, el Corolario 2.22 implica que $f_n$ también lo es. Ahora, el Teorema de Convergencia Monótona implica que

$$\int_I g = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Por tanto existe $N$ tal que

$$\int_I (g - f_N) < \epsilon/2.$$

Sea $\delta = \epsilon/2N$. Si $\{I_j\}_{j=1}^m$ es una subpartición de $I$ tal que $\sum_{j=1}^m \ell(I_j) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_j I_j} g &= \int_{\bigcup_j I_j} (g - f_N) + \int_{\bigcup_j I_j} f_N \\ &< \int_I (g - f_N) + N[\sum_{j=1}^m \ell(I_j)] \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \end{aligned}$$

de donde la primera desigualdad es debido a que $g - f_N \geqslant 0$ y al Corolario 1.39. $\square$

**Teorema 2.30.** *(Teorema de caracterización de $\mathcal{L}([a,b])$)*

*Una función $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ es absolutamente integrable sobre $[a,b]$ si y sólo si la integral indefinida $F(x) = \mathcal{HK}\int_a^x f$ es absolutamente continua sobre $[a,b]$.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \in \mathcal{L}([a,b])$ y sea $F(x) = \int_a^x f$. Por el Lema 2.29, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $I_j = \{[u_j, v_j]\}_{j=1}^m$ es una subpartición de $I$ con $\sum_{j=1}^m (v_j - u_j) < \delta$, entonces

$$\sum_{j=1}^m |F(v_j) - F(u_j)| = \sum_{j=1}^m \left| \int_{u_j}^{v_j} f \right| \leqslant \sum_{j=1}^m \int_{u_j}^{v_j} |f| = \int_{\bigcup_j I_j} |f| < \epsilon.$$

Por lo tanto $F \in AC([a,b])$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $F \in AC([a,b])$. Por la Proposición 2.27, $F \in BV([a,b])$. Luego, por el Teorema de Caracterización de integrabilidad absoluta, $f \in \mathcal{L}([a,b])$. $\square$

En la teoría de integración de Lebesgue toda función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada. El teorema que acabamos de probar muestra la "estrecha" relación entre las funciones absolutamente integrables y las Lebesgue integrables. Efectivamente, estas clases coinciden y la prueba detallada de ello la daremos en el Capítulo 4.

En la Proposición 2.27 vimos que si $f \in AC(I)$, entonces $f \in BV(I)$. El siguiente corolario garantiza que toda integral indefinida de variación acotada también es absolutamente continua.

**Corolario 2.31.** *Si $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y su integral indefinida $F$ es de variación acotada, entonces $F \in AC([a,b])$.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.17, tenemos que $f$ es absolutamente integrable. Luego el teorema anterior implica que $F \in AC([a,b])$. $\square$

# Capítulo 3

# Teoremas de convergencia

La necesidad de considerar límites de sucesiones o series de funciones es básica en el estudio del análisis. Por tanto, es natural preguntarse bajo qué condiciones se tiene que un límite de funciones posee ciertas propiedades deseadas y cuándo es posible intercambiar el signo de límite por el de integral.

En el estudio de la integral de Riemann tenemos el escenario más restrictivo, ya que por ejemplo, el límite $f$ de una sucesión $\{f_n\}$ de funciones Riemann integrables no es necesariamente Riemann integrable. Incluso si el límite fuese Riemann integrable, su integral de Riemann podría diferir del límite de la sucesión de integrales ([3] p. 233). El intercambio de operaciones

$$\int_I \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n, \tag{3.1}$$

es posible si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente, pero esta condición es sumamente fuerte.

Una de las principales razones por las que la integral de Lebesgue se ha convertido en una herramienta central e indispensable del análisis matemático es por sus teoremas de convergencia. La integral de Lebesgue ha remediado eficientemente el problema de asegurar la igualdad en (3.1) requiriendo hipótesis no tan fuertes. En este capítulo veremos que las versiones de dichos teoremas para la integral de Henstock y Kurzweil también se cumplen. Estableceremos el Teorema de Convergencia Monótona, el Lema de Fatou, y el Teorema de Convergencia Dominada, entre otros resultados.

El Teorema de Convergencia Monótona es un resultado muy importante del cual se derivan los restantes. En la primera prueba que exponemos de dicho teorema usamos la definición “tipo Darboux” con integrales inferiores y superiores que vimos en el Capítulo 1. Al final de este capítulo presentamos también la demostración que usualmente se expone en las referencias del tema que se basa en el Lema de Henstock.

## 3.1. El Teorema de Convergencia Uniforme

La condición familiar que garantiza la integrabilidad de una función límite y el intercambio en la igualdad (3.1) concerniente a la noción de convergencia uniforme se sigue cumpliendo para la HK-integral.

**Definición 3.1.** Una sucesión $\{f_k\}$ de funciones reales definidas sobre un intervalo cerrado $I$ *converge uniformemente* sobre $I$ a una función $f$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $k \geqslant N$ y $x \in I$.

**Teorema 3.2.** *(Convergencia Uniforme) Si la sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{HK}(I)$ converge uniformemente a $f$, entonces $f \in \mathcal{HK}(I)$ y la igualdad (3.1) se verifica.*

*Demostración.* Primero probaremos que $\{\int_I f_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$, por definición de convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $h, k \geqslant N$ y $x \in I$ entonces $|f_k(x) - f_h(x)| < 2\epsilon$.

Por la monotonía y la linealidad de la integral, tenemos que

$$|\int_I f_k - \int_I f_h| \leqslant 2\epsilon\ell(I).$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, la sucesión $\{\int_I f_n\}$ es de Cauchy y por lo tanto converge a un número real $A \in \mathbb{R}$.

Ahora mostraremos que $f \in \mathcal{HK}(I)$ y que $A$ es su integral. Sea $\epsilon > 0$ y $N$ como arriba. Sea $k \geqslant N$ fijo tal que $|\int_I f_k - A| < \epsilon$. Ahora, sea $\beta$ una cubierta de Cousin de la definición de integrabilidad de $f_k$, de manera que $|S_\pi(f_k) - \int_I f_k| < \epsilon$ siempre que $\pi \subset \beta$. Además, para la misma $k \geqslant N$ y una partición $\pi \subset \beta$ tenemos que por la convergencia uniforme que

$$\begin{aligned}
|S_\pi(f) - S_\pi(f_k)| &= \left| \sum_{(I,x)\in\pi} [f(x) - f_k(x)]\ell(I) \right| \\
&\leqslant \sum_{(I,x)\in\pi} |f(x) - f_k(x)|\ell(I) \\
&\leqslant \sum_{(I,x)\in\pi} \epsilon\ell(I).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$|S_\pi(f) - A| \leqslant |S_\pi(f) - S_\pi(f_k)| + |S_\pi(f_k) - \int_I f_k| + |\int_I f_k - A| < \epsilon(\ell(I) + 2)$$

para toda $\pi \subset \beta$. Por lo tanto $f \in \mathcal{HK}(I)$ y $\int_I f = A = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$. $\square$

## 3.2. El Teorema de Convergencia Monótona

En muchas ocasiones la condición de convergencia uniforme es muy fuerte. El teorema que presentamos en esta sección requiere de hipótesis que en la práctica son más fáciles de verificar.

Deseamos establer la siguiente igualdad

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b f_n(x)dx \right). \tag{3.2}$$

La integral de Henstock-Kurzweil, similarmente a la de Lebesgue, permite este intercambio para funciones no-negativas. Para su prueba, descomponemos el resultado en un par de lemas.

**Lema 3.3.** *Supongamos que $f$ y $f_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) son funciones no-negativas sobre un intervalo $[a, b]$. Si*

$$f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

*para cada $x \in [a, b]$, entonces*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left( \overline{\int_a^b} f_n(x)dx \right). \tag{3.3}$$

**Demostración:** Sea $t < 1$ y $\epsilon > 0$. Para $x \in [a, b]$, sea $N(x)$ el primer entero tal que satisface la propiedad

$$tf(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N(x)} f_n(x). \tag{3.4}$$

Podemos escoger cubiertas de Cousin $\beta_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) de $[a, b]$ anidadas de la forma $\beta_1 \supset \beta_2 \supset \beta_3 \supset \cdots$, tales que

$$S_\pi(f_n) \leqslant \overline{\int_a^b} f_n(x)dx + \epsilon\, 2^{-n} \tag{3.5}$$

para cualquier partición $\pi \subset \beta_n$. Si para alguna $n$ la integral superior de $f_n$ diverge, entonces ya hemos terminado ya que la parte derecha de (3.3) será infinita. Entonces supongamos que cada integral superior $\overline{\int_a^b} f_n$ es finita.

Definamos, para cada $n$, el conjunto $E_n$ como sigue

$$E_n = \{x \in [a, b] \,:\, N(x) = n\}.$$

De cada cubierta $\beta_n$ extraemos las parejas que tienen como etiqueta a los valores $x \in E_n$, formando

$$\beta_n[E_n] = \{(I, x) \in \beta_n \,:\, x \in E_n\}.$$

Note que el conjunto $\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n[E_n]$ forma directamente una cubierta de Cousin de $[a, b]$. Por el Lema de Cousin, podemos escoger una partición $\pi \subset \beta$. Sea $N$ el máximo de los valores $N(x)$ para la colección finita de pares $(I, x) \in \pi$ y definamos

$$\pi_j = \{(I, x) \in \pi \,:\, x \in E_j\}$$

y

$$\sigma_j = \pi_j \cup \pi_{j+1} \cup \cdots \cup \pi_N$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, N$. Note que $\pi = \sigma_1$. Si $m > n$, entonces cualquier partición $\pi \subset \beta_m$ es partición en $\beta_n$. Por tanto se tiene que $\sigma_j \subset \beta_j$.

Para visualizar mejor un cálculo que usaremos enseguida, mostramos el siguente arreglo

$$\begin{array}{cccccc}
S_{\pi_1}(f_1) & S_{\pi_2}(f_1) & S_{\pi_3}(f_1) & S_{\pi_4}(f_1) & \cdots & S_{\pi_N}(f_1) \\
 & S_{\pi_2}(f_2) & S_{\pi_3}(f_2) & S_{\pi_4}(f_2) & \cdots & S_{\pi_N}(f_2) \\
 & & S_{\pi_3}(f_3) & S_{\pi_4}(f_3) & \cdots & S_{\pi_N}(f_3) \\
 & & & \ddots & \cdots & \vdots \\
 & & & & & S_{\pi_N}(f_N)
\end{array}$$

Con base en el arreglo, tenemos la siguiente igualdad

$$\sum_{i=1}^{N} S_{\pi_i}(f_1 + f_2 + \cdots + f_i) = \sum_{j=1}^{N} S_{\sigma_j}(f_j).$$

La parte izquierda se obtiene sumando las columnas, mientras que la parte derecha sumando los renglones. Finalmente, usando el hecho de que

$$tf(x) \leqslant f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_i(x) \qquad \forall\, x \in E_i$$

y la desigualdad (3.5), tenemos que

$$\begin{aligned} S_\pi(tf) &= \sum_{i=1}^{N} S_{\pi_i}(tf) \leqslant \sum_{i=1}^{N} S_{\pi_i}(f_1 + f_2 + \cdots + f_i) \\ &= \sum_{j=1}^{N} S_{\sigma_j}(f_j) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \left( \overline{\int_a^b} f_j(x)dx + \epsilon 2^{-j} \right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\int_a^b} f_j(x)dx + \epsilon. \end{aligned}$$

Hemos obtenido una cota superior para todas las sumas $S_\pi(tf)$, es decir, para cualquier partición $\pi \subset \beta$. Como además $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces

$$\overline{\int_a^b} tf(x)dx \leqslant \sup_{\pi\subset\beta} S_\pi(tf) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\int_a^b} f_j(x)dx.$$

Dado que esto último es cierto para cualquier $t < 1$, entonces (3.3) se sigue. □

**Lema 3.4.** *Supongamos que $f$ y $f_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) son funciones no negativas sobre un intervalo $[a, b]$. Si*

$$f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

*para cada $x \in [a, b]$, entonces*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left( \underline{\int_a^b} f_n(x)dx \right). \tag{3.6}$$

*Demostración.* Para demostrar la parte (3.6), usaremos la propiedad que vimos en la Sección 1.4 de que la interesección finita de cubiertas de Cousin es también una cubierta de Cousin.

Sea $\epsilon > 0$. Fijemos $N \in \mathbb{N}$. Como antes, podemos escoger cubiertas de Cousin $\beta_n$ de $[a, b]$ anidadas $\beta_1 \supset \beta_2 \supset \cdots \supset \beta_N$, tales que

$$S_\pi(f_n) \geqslant \underline{\int_a^b} f_n(x)dx - \frac{\epsilon}{N}$$

para cualquier partición $\pi \subset \beta_n$. Definamos $\beta = \cap_{n=1}^N \beta_n$, la cual es una cubierta de Cousin de $[a, b]$. Considere una partición $\pi \subset \beta$. Cualquier partición en $\beta$ es partición en $\beta_n$, para $n \leqslant N$. Dado que $f(x) \geqslant \sum_{n=1}^N f_n(x)$, tenemos que

$$S_\pi(f) \geqslant \sum_{n=1}^N S_\pi(f_n) \geqslant \sum_{n=1}^N \left( \underline{\int_a^b} f_n(x)dx \right) - \epsilon.$$

Hemos obtenido una cota inferior para todas las particiones $\pi \subset \beta$. Por tanto tenemos que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \geqslant \inf_{\pi \subset \beta} S_\pi(f) \geqslant \sum_{n=1}^N \left( \underline{\int_a^b} f_n(x)dx \right) - \epsilon.$$

Como además $N$ fue tomada arbitrariamente grande y $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \geqslant \sum_{n=1}^\infty \left( \underline{\int_a^b} f_n(x)dx \right). \qquad \square$$

**Teorema 3.5.** *(Smithee, [14]) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones no-negativas HK-integrables sobre $I = [a, b]$. Si para cada $x \in [a, b]$*

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$$

*y*

$$\sum_{n=1}^\infty \left( \int_I f_n \right) < \infty,$$

*entonces $f$ es HK-integrable sobre $I$ y su integral está dada por*

$$\int_I f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \left( \int_I f_n(x)dx \right). \tag{3.7}$$

*Demostración.* Por los lemas anteriores y por la definición de integral inferior y superior, la siguiente cadena de desigualdades se cumple:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underline{\int_I} f_n\right) \leqslant \underline{\int_I} f \leqslant \int_I f \leqslant \overline{\int_I} f \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{\int_I} f_n\right).$$

Ya que las funciones $f_n \in \mathcal{HK}(I)$, los extremos son iguales a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n < \infty.$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{HK}(I)$ con integral dada por (3.7). $\square$

Consideremos la descomposición de $f$ en sus partes positiva y negativa, $f^+$ y $f^-$ respectivamente, que se definen como sigue:

$$f^+ := \max\{f, 0\} \qquad \text{y} \qquad f^- := \min\{-f, 0\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}(I)$ entonces las funciones $f^+$ y $f^-$ son HK-integrables. Esto se sigue de las identidades

$$f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|) \qquad \text{y} \qquad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \tag{3.8}$$

y de la linealidad de la integral. Dado que $f^+, f^- \geqslant 0$, éstas pertenecen a la clase $\mathcal{L}(I)$. En el siguiente corolario veremos un resultado que involucra funciones en la clase $\mathcal{L}(I)$.

**Corolario 3.6.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{L}(I)$ y supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\int_I |f_n|$ converge. Entonces la suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge, es integrable y*

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n.$$

*Demostración.* De las identidades en la ecuación (3.8) se pueden obtener fácilmente las siguientes:

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{y} \qquad |f| = f^+ + f^-. \tag{3.9}$$

Ahora bien, note que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n^- = \sum_{n=1}^{\infty}\int_I (f_n^+ + f_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_I |f_n| < \infty.$$

Entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n^-$ convergen.

Si definimos las funciones $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^+(x)$ y $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^-(x)$, dado que $f_n^+$ y $f_n^-$ son no-negativas y HK-integrables para cada $n$, entonces el teorema anterior asegura que $g$ y $h$ son integrables y que satisfacen

$$\int_I g = \sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n^+ \qquad \text{y} \qquad \int_I h = \sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n^-.$$

Luego tomemos $f := g - h$, obteniendo $f = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n^+ - f_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ convergente e integrable.

Finalmente, concluimos que

$$\int_I f = \int_I g - \int_I h = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_I f_n^+ - \int_I f_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n. \qquad \square$$

**Teorema 3.7.** *(Convergencia Monótona) Sea $\{f_n\}$ una sucesión monótona en $\mathcal{HK}(I)$ y sea $f(x) = \lim_n f_n(x)$ para toda $x \in I$. Entonces $f \in \mathcal{HK}(I)$ si y sólo si la sucesión $\{\int_I f_n\}$ es acotada. En este caso,*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n. \tag{3.10}$$

*Demostración.* Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ es creciente. En caso contrario, el resultado se obtiene considerando $\{-f_n\}$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $f \in \mathcal{HK}(I)$. Dado que $f_1(x) \leqslant f_k(x) \leqslant f(x)$ para toda $k$, la monotonía de la integral implica que

$$-\infty < \int_I f_1 \leqslant \int_I f_k \leqslant \int_I f < \infty.$$

Entonces, efectivamente la sucesión de integrales está acotada.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\{\int_I f_n\}$ está acotada, entonces el límite existe. Considere la siguiente identidad

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty}(f_k(x) - f_{k-1}(x)).$$

Como el término $(f_k(x) - f_{k-1}(x)) \geqslant 0$ para toda $k$ y para toda $x$ y además por hipótesis

$$\sum_{k=2}^{\infty} \int_I (f_k - f_{k-1}) < \infty,$$

puede aplicarse el Teorema 3.5. Por tanto $f - f_1$ es HK-integrable sobre $I$ y

$$\int_I (f - f_1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \int_I (f_k - f_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n - \int_I f_1.$$

De lo anterior concluimos que $f \in \mathcal{HK}(I)$ y su integral está dada por

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n. \qquad \square$$

**Observación:** Como probaremos más adelante en este capítulo, si se modifica una función integrable sobre un conjunto nulo $E$ no se afecta ni la existencia ni el valor de la integral. Entonces podemos suponer que la sucesión en el teorema anterior es monótona para toda $x$ excepto en $E$ y el teorema se sigue verificando.

**Ejemplo 3.8.** Sea $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ un abierto contenido en un intervalo cerrado $[a, b]$, donde los intervalos $I_i$ son disjuntos. Si tomamos $f_n := \mathbf{1}_{G_n}$ donde $G_n = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, entonces la sucesión $\{f_n\}$ es creciente, converge puntualmente a la función $f = \mathbf{1}_G$, y $\{\int_a^b f_n\}$ está acotada por $(b - a)$. Por lo tanto se satisfacen las condiciones del Teorema 3.7 obteniendo como resultado que la función $f = \mathbf{1}_G$ es HK-integrable sobre $[a, b]$, y por el Corolario 1.45 tenemos

$$\int_a^b \mathbf{1}_G = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathbf{1}_{G_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i).$$

## 3.3. El Lema de Fatou

Este resultado es muy útil cuando la sucesión de funciones no es necesariamente monótona. Tanto en la prueba del Lema de Fatou como en la del Teorema de Convergencia Dominada que veremos en la siguiente sección, hacemos uso de la noción de *límite inferior* y *límite superior* de una sucesión. Enunciaremos la definición y algunos resultados que utilizaremos sin demostración.

**Definición 3.9.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y sea $p_n := \sup_{m\geqslant n}\{x_m\}$. Definimos el *límite superior* de $\{x_n\}$ como

$$\limsup x_n = \inf_n p_n = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

Similarmente el *límite inferior* se define como el supremo (o el límite) de la sucesión $\{q_n\}$, donde $q_n := \inf_{m\geqslant n}\{x_m\}$.

Si la sucesión $\{x_n\}$ es acotada, entonces tanto la sucesión de supremos $\{p_n\}$ como la sucesión de ínfimos $\{q_n\}$ son acotadas. Además $\{p_n\}$ es decreciente y $\{q_n\}$ es creciente, por tanto ambas convergen. Es posible que los límites inferior y superior diverjan cuando la sucesión $\{x_n\}$ no es acotada.

**Proposición 3.10.** *Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones de reales. Entonces*

**a)** $\liminf x_n \leqslant \limsup x_n$.

**b)** *Si $c \geqslant 0$ y $d \leqslant 0$, entonces*

$$\begin{aligned}
\liminf(c\,x_n) &= c\liminf x_n,\\
\limsup(c\,x_n) &= c\limsup x_n,\\
\liminf(d\,x_n) &= d\limsup x_n,\\
\limsup(d\,x_n) &= d\liminf x_n.
\end{aligned}$$

**c)** $\liminf x_n + \liminf y_n \leqslant \liminf(x_n + y_n)$.

**d)** $\limsup(x_n + y_n) \leqslant \limsup x_n + \limsup y_n$.

**e)** *Si* $x_n \leqslant y_n$ *para cada* $n$, *entonces*

$$\liminf x_n \leqslant \liminf y_n,$$
$$\limsup x_n \leqslant \limsup y_n.$$

**f)** *La sucesión* $\{x_n\}$ *converge si y sólo si* $\liminf x_n = \limsup x_n$. *En ese caso*

$$\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n.$$

**Lema 3.11.** *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión en* $\mathcal{HK}(I)$ *y* $\alpha \in \mathcal{HK}(I)$ *tal que*

$$\alpha(x) \leqslant f_n(x)$$

*para cada* $x \in I$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces* $\inf_n f_n$ *es HK-integrable sobre* $I$.

*Demostración.* Como $\{f_n\}$ está acotada inferiormente por la función $\alpha$, es claro que el ínfimo $\inf_n f_n$ existe. Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$ hacemos

$$g_k := \operatorname{Min}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}.$$

Como $\alpha \leqslant f_k$ para cada $k$, el Corolario 2.23 b) implica que $g_k \in \mathcal{HK}(I)$. Además, la sucesión $\{g_n\}$ es decreciente y las integrales $\int_I g_k$ están acotadas inferiormente por $\int_I \alpha$. Por lo tanto, concluimos por el Teorema 3.7 que $\lim_n g_n$ es HK-integrable sobre $I$. Por como construimos $\{g_n\}$ es claro que $\inf_n f_n = \lim_n g_n$. □

**Teorema 3.12.** *(Lema de Fatou) Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión en* $\mathcal{HK}(I)$ *y* $\alpha \in \mathcal{HK}(I)$ *tal que* $\alpha(x) \leqslant f_n(x)$ *para cada* $x \in I$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *y supongamos que*

$$\liminf \int_I f_k < \infty. \tag{3.11}$$

*Entonces* $\liminf_n f_n$ *está en* $\mathcal{HK}(I)$ *y*

$$\int_I \liminf f_n \leqslant \liminf \int_I f_n. \tag{3.12}$$

*Demostración.* Sea $q_n := \text{ínf}\{f_m : m \geqslant n\}$. La sucesión es creciente y por el lema anterior, las funciones $q_n$ son HK-integrables sobre $I$. Dado que $\alpha \leqslant q_n \leqslant f_n$, por la monotonía de la integral y la propiedad e) en la Proposición 3.10 tenemos

$$\liminf \int_I q_n \leqslant \liminf \int_I f_n. \tag{3.13}$$

Si la sucesión $\{\int_I q_n\}$ no es convergente, es decir, si $\lim_{n\to\infty} \int_I q_n$ diverge, entonces la parte izquierda en la ecuación (3.12) diverge y por consecuencia también la parte derecha, lo que contradice la hipótesis en la ecuación (3.11). Entonces, $\{\int_I q_n\}$ converge y por tanto es acotada. Luego, el Teorema de Convergencia Monótona asegura que $q = \lim_n q_n = \liminf f_n$ está en $\mathcal{HK}(I)$ y

$$\int_I \liminf f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \int_I q_n. \tag{3.14}$$

Finalmente, combinando las últimas dos ecuaciones y la propiedad f) en la Proposición 3.10, la ecuación (3.12) se verifica. □

A continuación ofrecemos dos ejemplos ilustrando que no podemos prescindir de la existencia de la función $\alpha$ y de la ecuación (3.11) en el Teorema 3.12.

**Ejemplo 3.13.** Sea $I = [0, 1]$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $f_n$ sobre $I$ como

$$f_n(x) = -n\mathbf{1}_{(0,1/n]}(x).$$

La sucesión converge puntualmente a la función nula. Entonces, la parte izquierda en la ecuación (3.12) es 0.

Por el Corolario 1.45, cada $f_n$ es HK-integrable sobre $I$ y su integral es el valor

$$\int_I f_n = -1.$$

Luego, la parte derecha en la ecuación (3.12) toma el valor -1. El problema es que la función $f_n$ toma el valor $-n$ en el intervalo $(0, 1/n]$, de manera que no existe una cota inferior para la sucesión $\{f_n\}$.

**Ejemplo 3.14.** Sea $I = [0,1]$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $f_n$ sobre $I$ como

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{(1/n,1)}(x).$$

La sucesión está acotada inferiormente por la función nula y converge a la función $f(x) = 1/x^2$ para $x \in (0,1]$ y $f(0) = 0$. Además

$$\int_0^1 f_n = \int_{1/n}^1 \frac{1}{x^2} = -1 + n$$

por lo que la sucesión de integrales $\{\int_I f_n\}$ diverge y por lo tanto la condición en la ecuación (3.11) no se cumple.

Ahora mostraremos que la función límite $f$ no es HK-integrable sobre $[0,1]$. Para ello, usaremos el Lema 1.49. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $g_n(x) = n^2\mathbf{1}_{(0,1/n)}(x)$. Cada $g_n$ es HK-integrable sobre $I$ y su integral es

$$\int_0^1 g_n = \int_0^{1/n} n^2 = n.$$

Como $0 \leqslant g_n(x) \leqslant f(x)$ para cada $x \in I$ y $n \in \mathbb{N}$, el Lema 1.49 se verifica y concluimos que $f \notin \mathcal{KH}(I)$.

Como un corolario al Lema de Fatou presentamos la versión dual, la cual usaremos en la prueba del Teorema de Convergencia Dominada.

**Corolario 3.15.** *(Dual del Lema de Fatou) Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión en* $\mathcal{HK}(I)$ *y* $\beta \in \mathcal{HK}(I)$ *tal que* $f_n(x) \leqslant \beta(x)$ *para cada* $x \in I$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *y supongamos que*

$$-\infty < \operatorname{lím\,sup} \int_I f_k. \tag{3.15}$$

*Entonces* $\operatorname{lím\,sup}_n f_n$ *está en* $\mathcal{HK}(I)$ *y*

$$\operatorname{lím\,sup} \int_I f_n \leqslant \int_I \operatorname{lím\,sup} f_n. \tag{3.16}$$

*Demostración.* La prueba se sigue de considerar la sucesión $\{-f_n\}$, el Lema de Fatou y las propiedades de límite inferior y superior en la Proposición 3.10 parte b). $\square$

## 3.4. El Teorema de Convergencia Dominada

**Teorema 3.16.** *(Convergencia Dominada) Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión en* $\mathcal{HK}(I)$ *con* $f(x) = \lim_n f_n(x)$ *para cada* $x \in I$*, y* $\alpha, \beta \in \mathcal{HK}(I)$ *tales que*

$$\alpha(x) \leqslant f_n(x) \leqslant \beta(x)$$

*para cada* $x \in I$ *y* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces* $f$ *es HK-integrable sobre* $I$ *y se verifica la igualdad*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

*Demostración.* Dado que la sucesión de integrales $\{\int_I f_n\}$ está acotada por

$$\int_I \alpha \leqslant \int_I f_n \leqslant \int_I \beta, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

entonces $\liminf \int_I f_n < \infty$ y $\limsup \int_I f_n > -\infty$, de donde aplicando el Lema de Fatou y su dual obtenemos respectivamente

$$\int_I f \leqslant \liminf \int_I f_n \quad \text{y} \quad \limsup \int_I f_n \leqslant \int_I f.$$

Entonces, la Proposicion 3.10 a) implica que

$$\liminf \int_I f_n = \limsup \int_I f_n = \int_I f.$$

Finalmente, por la Proposición 3.10 f) concluimos que

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

□

**Observación 3.17.** Es fácil ver que si alguna de las funciones $f_n, \alpha, \beta$ en el teorema anterior es absolutamente integrable, entonces la función límite $f$ también lo es. Primeramente, una función $g$ HK-integrable está en $\mathcal{L}(I)$ si y sólo existe $\alpha$ HK-integrable en $\mathcal{L}(I)$ tal que $\alpha \leqslant g$, o si y sólo si existe $\beta$ HK-integrable en $\mathcal{L}(I)$ tal que $g \leqslant \beta$. La condición de necesidad es trivial en ambos casos. Para la condición de suficiencia basta tomar $g := (g-\alpha)+\alpha$ y $g := \beta - (\beta - g)$, respectivamente.

**Corolario 3.18.** *Con las hipótesis del Teorema 3.16, si alguna de las funciones $f_n, \alpha, \beta$ pertenece a la clase $\mathcal{L}(I)$ entonces la función límite $f = \text{lím}_n f_n$ también pertenece a $\mathcal{L}(I)$.*

*Demostración.* Claramente $f \in \mathcal{HK}(I)$. Como cada $f_n \in \mathcal{HK}(I)$ entonces también $f - f_n \in \mathcal{HK}(I)$. Dado que también $-\beta(x) \leqslant -f_n(x) \leqslant -\alpha(x)$, entonces

$$-(\beta - \alpha) \leqslant f - f_n \leqslant \beta - \alpha.$$

De aquí obtenemos $|f - f_n| \leqslant \beta - \alpha$. El Criterio de comparación, Proposición 2.20, implica que $f - f_n \in \mathcal{L}(I)$. De este modo, si alguna $f_n$ es absolutamente integrable sobre $I$ entonces también lo es $f$.

Por otro lado, si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ en la desigualdad $\alpha \leqslant f_n \leqslant \beta$, obtenemos $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$. Así, si $\alpha$ o $\beta$ es absolutamente integrable, por lo discutido anteriormente $f$ también lo es. □

En la Proposición 2.7 vimos que una serie convergente define una función HK-integrable. A continuación, veremos un ejemplo de una sucesión de funciones HK-integrables pero que no son absolutamente integrables, para la cual se verifican las hipótesis de los Teoremas de Convergencia Uniforme, Monótona y Dominada.

**Ejemplo 3.19.** Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$. Se puede probar que esta serie converge (Ver [3] p. 92). Claramente, la serie no converge absolutamente ya que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge.

Definamos la función $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) := \begin{cases} 2^k(-1)^{k+1}/k & x \in [c_{k-1}, c_k),\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & x = 1, \end{cases}$$

donde $c_k = 1 - 1/2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces, por la Proposición 2.7 tenemos que $h \in \mathcal{HK}([0, 1])$. Por la Observación 2.8, sabemos que $|h| \notin \mathcal{HK}([0, 1])$ (Ver Figura 3.1).

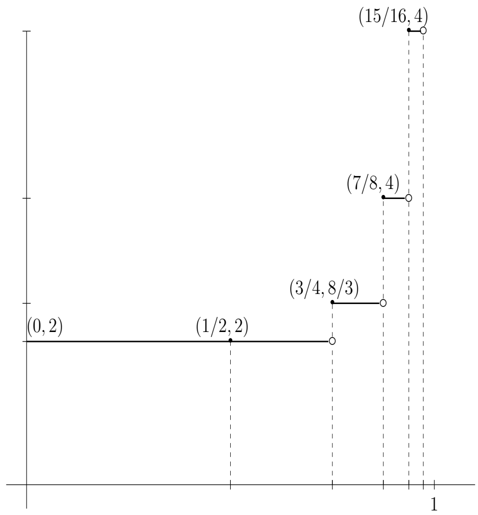


Figura 3.1: Gráfica de $|h|$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos la función $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$h_n(x) := h(x) + 1/n, \quad \text{para cada } x \in [0,1].$$

Por la linealidad de la integral, $h_n \in \mathcal{HK}([0,1])$ para cada $n = 1, 2, \ldots$.

Es fácil probar que $h_n$ no es absolutamente integrable. Si suponemos lo contrario y consideramos

$$|h + 1/n| = |h_n|,$$

tendríamos por el criterio 2.20 que $h + 1/n$ es absolutamente integrable y por tanto que $h$ lo es, lo cual es una contradicción.

**a)** La sucesión $\{h_n\}$ converge uniformemente a $h$. Note que

$$|h_n(x) - h(x)| = 1/n, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Por tanto, el Teorema 3.2 implica que la igualdad en (3.1) se cumple.

**b)** La sucesión $h_n(x) \downarrow h(x)$ para cada $x \in [0,1]$ y por tanto el Teorema 3.7 se cumple.

**c)** Para cada $n$, note que

$$h(x) \leqslant h_n(x) \leqslant h(x) + 1.$$

Por tanto, el Teorema 3.16 también se cumple.

**Observación 3.20.** Note que las funciones $h_n$ no son acotadas, por tanto ninguna de las funciones $h_n$ es Riemann integrable. También, como ya advertimos, ninguna de las funciones $h_n$ es absolutamente integrable, así que ninguno de los teoremas anteriores se verifica cuando nos restringimos a la clase $\mathcal{L}([0,1])$.

## 3.5. Prueba alternativa del Teorema de Convergencia Monótona usando el Lema de Henstock

**Proposición 3.21.** *(Teorema de Convergencia Monótona*) Sea $I = [a,b]$ y $\{f_n\}$ una sucesión monótona en $\mathcal{HK}(I)$. Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Entonces $f \in \mathcal{HK}(I)$ si y sólo si la sucesión $\{\int_I f_n\}$ es acotada.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Igual que en la prueba del Teorema 3.7.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\{\int_I f_n\}$ es acotada, entonces $A = \sup\{\int_I f_n : n \in \mathbb{N}\}$ existe. Sea $\epsilon > 0$. Sea $r \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $1/2^{r-1} < \epsilon$ y

$$0 \leqslant A - \int_I f_r < \epsilon. \tag{3.17}$$

Como $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada $x \in I$, entonces podemos escoger un entero $k(x) \geqslant r$ tal que

$$|f_{k(x)}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{3.18}$$

Además, como $f_n \in \mathcal{HK}(I)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una cubierta de Cousin $\beta_n$ tal que

$$\left| S_\pi(f_n) - \int_I f_n \right| < \frac{1}{2^n}, \qquad \forall\, \pi \subset \beta_n. \tag{3.19}$$

Ahora definimos una cubierta de Cousin $\beta$ de $I$ como sigue

$$\beta = \{(I, x) \,:\, (I, x) \in \beta_{k(x)}\}. \tag{3.20}$$

Note que esta $\beta$ depende de $\epsilon > 0$. Ahora, sea $\pi = \{(I_i, x_i)\}_{i=1}^n$ es partición contenida en $\beta$. Entonces

$$|S_\pi(f) - A| \leqslant \left| \sum_{i=1}^n f(x_i)\ell(I_i) - \sum_{i=1}^n f_{k(x_i)}(x_i)\ell(I_i) \right| \tag{3.21}$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^n f_{k(x_i)}(x_i)\ell(I_i) - \sum_{i=1}^n \int_I f_{k(x_i)} \right| \tag{3.22}$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^n \int_I f_{k(x_i)} - A \right|. \tag{3.23}$$

Por (3.18), el término en (3.21) es acotado por

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f_{k(x_i)}(x_i)|\ell(I_i) < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a}\ell(I_i) = \epsilon.$$

Ahora deseamos acotar el término en (3.22). Sea $s$ definida como

$$s := \max\{k(x_i) : i = 1, 2, \ldots, n\} \geqslant r.$$

Considere la subpartición $\pi_p := \{(I_i, x_i) \in \pi \,:\, k(x_i) = p\}$, $p = r, \ldots, s$. Usando (3.19) y el Lema de Henstock concluimos que

$$\sum_{p=r}^s \sum_{k(x_i)=p} \left| f_{k(x_i)}(x_i)\ell(I_i) - \int_{I_i} f_{k(x_i)} \right| \leqslant \sum_{p=r}^s \frac{1}{2^p} < \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{r-1}} < \epsilon.$$

Finalmente acotaremos (3.23). Como $f_r \leqslant f_{k(x_i)} \leqslant f_s$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la monotonía de la integral implica que

$$\int_{I_i} f_r \leqslant \int_{I_i} f_{k(x_i)} \leqslant \int_{I_i} f_s.$$

Luego sumamos las integrales sobre cada subintervalo $I_i$ obteniendo

$$\int_I f_r \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_I f_{k(x_i)} \leqslant \int_I f_s.$$

Entonces por (3.18) concluimos que $A - \epsilon < \sum_{i=1}^{n} \int_I f_{k(x_i)} \leqslant A$, por lo que (3.23) está dominada por $\epsilon > 0$.

Por lo tanto

$$|S_\pi(f) - A| \leqslant 3\epsilon,$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, el teorema está completo. $\square$

# Capítulo 4

# El Teorema Fundamental del Cálculo

En este capítulo enunciaremos y mostraremos el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Henstock y Kurzweil. En la Sección 1.10 establecimos una primera versión de este importante teorema, el cual puede ser resumido como sigue:

- *Si $F'$ existe y $F'(x) = f(x)$ entonces $F(x) = F(a) + \int_a^x f$.*
- *Si $F(x) = F(a) + \int_a^x f$ entonces $F'(x) = f(x)$ donde $f$ es continua.*

Si nos queremos referir a la integral de Lebesgue escribiremos $\mathcal{L}\int_I f$ y si deseamos enfatizar que hablamos de la HK-integral escribiremos $\mathcal{HK}\int_I f$.

Otro objetivo es dar una caracterización de la HK integral. En la sección 4.3 ofrecemos una mediante el concepto de *variación casi nula* que nos servirá para visualizar de una mejor manera la caracterización de la integral de Lebesgue. Posteriormente damos otra caracterización utilizando un concepto más general que en algún sentido es una generalización del concepto de continuidad absoluta.

## 4.1. Integración de derivadas

Si $F$ es continua sobre $[a, b]$ podemos extender el Teorema 1.67 permitiendo que $F'(x) = f(x)$ excepto en un conjunto numerable. Esto nos ayuda a observar con más claridad la diferencia significativa entre este teorema y el resultado dado en el contexto de Riemann en el Teorema 1.9.

**Teorema 4.1.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene una $n-$primitiva $F$ sobre $[a, b]$ entonces $f$ es HK-integrable y se cumple que*

$$\int_a^x f = F(x) - F(a), \qquad \forall\, x$$

*Demostración.* Recuerde la Definición 2.9 de cubierta de Cousin numerablemente cerrada. Sea $C = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ el conjunto donde $F'$ es distinta de $f$ o donde $F'$ no existe. Por la definición alternativa de derivada dada en el Lema 1.66, para cada $t \in [a, b]\backslash C$ existe $\delta_t > 0$ tal que si $u < v$ son tales que $[u, v] \subset (t - \delta_t, t + \delta_t)$, entonces

$$|F(v) - F(u) - F'(t)(v - u)| < \frac{\epsilon}{b - a}(v - u).$$

Claramente la relación de cobertura $\beta$ que contiene a los pares $([u, v], t)$ relacionados como arriba es una cubierta de Cousin n.c. de $[a, b]$. Con esta cubierta se cumplen las condiciones del Teorema 2.11, esto es,

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(t_i)(x_i - x_{i-1})| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b - a}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \epsilon$$

para cualquier subpartición $\pi \subset \beta$ y por tanto $f$ es HK-integrable sobre $[a, b]$. □

Note que este teorema no se verifica para la integral de Lebesgue ya que se requiere que $F$ sea absolutamente continua. Como ejemplo, $F(x) = x^2 \cos(1/x^2)$ para $x \in (0, 1]$ y $F(0) = 0$ tiene derivada en todos los puntos

$x \in (0,1]$, pero $F'$ no es Lebesgue integrable ya que $F$ no es absolutamente continua sobre $[0,1]$.

En el Capítulo 1 probamos a través del Ejemplo 1.29 que la función de Dirichlet es HK integrable sobre $[0,1]$. Ahora lo haremos usando el Teorema Fundamental del Cálculo.

**Ejemplo 4.2.** Sea $f$ la función de Dirichlet introducida en el Ejemplo 1.6. Si hacemos $F(x) = 0$ para toda $x \in [0,1]$, entonces $F$ es una $n-$primitiva de $f$ sobre $[0,1]$ ya que $F'(x) = 0 = f(x)$ para todos los irracionales $x$ en $[0,1]$. Entonces $f \in \mathcal{HK}([0,1])$ y $\int_0^1 f = F(1) - F(0) = 0$.

Ahora nos preguntamos si es posible debilitar aún más las hipótesis en el teorema anterior. Es decir, si $f$ tiene una $d-$primitiva $F$ sobre $[a,b]$, ¿podemos concluir que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y $\int_a^b f = F(b) - F(a)$?. La respuesta es no, y el contraejemplo lo damos usando la función de Cantor-Lebesgue $H$ que tratamos en el Ejemplo 2.26.

**Ejemplo 4.3.** La función de Cantor-Lebesgue tiene derivada $H'(x) = 0$ para todos los puntos $x \in [0,1]\backslash\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor. Efectivamente, si $x$ lo tomamos fuera del conjunto de Cantor, entonces por definición existe un intervalo abierto que contiene a $x$ en el cual la función $H$ es constante. Por consecuencia $H'(x) = 0$.

Ahora bien, como $H$ es una función continua, entonces $H$ es una $d-$primitiva sobre $[0,1]$ de la función cero. Como además $\mathcal{C}$ es un conjunto nulo, por la Proposición 1.60 tenemos que

$$\int_0^1 H' = 0$$

mientras que

$$H(1) - H(0) = 1.$$

Entonces $H$ no es una integral indefinida de $H'$ a pesar de que $H'$ es HK integrable sobre $[0,1]$.

## 4.2. Derivadas de integrales

En la Sección 1.10 probamos que si $f$ es HK integrable y continua, entonces su integral indefinida $F$ es diferenciable en todas partes y $F'(x) = f(x)$. En esta sección veremos que si a $f$ sólo se le pide ser HK integrable, entonces su integral indefinida es diferenciable e igual a $f$ casi en todas partes. En la prueba de este hecho el Lema de Henstock encuentra su más importante aplicación en este trabajo.

Necesitaremos los siguientes lemas.

**Lema 4.4.** *(de Austin) Sea $\mathcal{F} = \{I_j \subset \mathbb{R} : j = 1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto finito de intervalos. Entonces existe una colección disjunta $\{J_k : k = 1, 2, \ldots, m\}$ contenida en $\mathcal{F}$ tal que*

$$\frac{1}{3}\ell\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) \leqslant \ell\left(\bigcup_{k=1}^{m} J_k\right).$$

*Demostración.* Reordenando si es necesario, supongamos que

$$\ell(I_n) \leqslant \ell(I_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \ell(I_2) \leqslant \ell(I_1).$$

Sea $J_1 = I_1$. Sea $\mathcal{F}_1 = \{I \in \mathcal{F} : I_1 \cap I = \emptyset\}$. Note que si $I_j \in \mathcal{F}$ y $I_j \notin \mathcal{F}_1$, entonces $I_j \subset 3J_1$. Esto es porque $\ell(I_j) \leqslant \ell(I_1)$ y en el caso extremo estos conjuntos sólo se intersectan en un extremo, entonces basta triplicar la longitud de $J_1$ para que $I_j$ esté contenido en él.

Ahora, sea $J_2$ el elemento de $\mathcal{F}_1$ con el índice más pequeño (y por tanto de longitud mayor). Sea $\mathcal{F}_2 = \{I \in \mathcal{F}_1 : J_2 \cap I = \emptyset\}$. El razonamiento anterior también se aplica en este caso.

Como $\mathcal{F}$ es finito, la selección de intervalos $J_k$ termina después de un número finito de pasos, digamos $m$. Por construcción, los intervalos $\{J_k\}_{k=1}^{m}$ son disjuntos y si $I_i \in \mathcal{F}$ no fue seleccionado entonces existe $k$ tal que

$$I_i \subset 3J_k.$$

y así

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{I_i \cap J_k \neq \emptyset} I_i \subset \bigcup_{k=1}^{m} 3J_m.$$

Por lo tanto

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) \leqslant \ell\left(\bigcup_{k=1}^{m} 3J_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ell(3J_k) = 3\sum_{k=1}^{m} \ell(J_k) = 3\ell\left(\bigcup_{k=1}^{m} J_k\right). \qquad \square$$

**Lema 4.5.** *Sea $S$ un conjunto arbitrario, $S \subset \mathbb{R}$, y $\delta : S \to (0,\infty)$. Entonces existe una colección numerable de intervalos cerrados y no traslapados $\{K_n : n = 1, 2, \ldots\}$ tal que para cada $K_n$, existe $x_n \in S$ con*

$$K_n \subset (x_n - \delta(x_n), x_n + \delta(x_n)) \tag{4.1}$$

*y*

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{4.2}$$

*Demostración.* Construimos la sucesión $\{K_n\}$ por pasos. En el $k-$ésimo paso, dividimos el intervalo $[-k, k]$ en $2^k$ intervalos cerrados no traslapados $I$ de igual longitud. Si alguno de los intervalos $I$ contiene algún punto $x$ de $S$ y satisface que $I \subset (x - \delta(x), x + \delta(x))$, entonces lo denotamos con $K$ y lo agregamos a los intervalos previamente seleccionados, enumerándolo con el siguiente índice tanto a $K$ como al $x$ correspondiente. Agregamos tantos $K$ como intervalos haya en este paso que satisfagan la propiedad descrita. De aquí, la ecuación (4.1) se sigue.

Resta probar la contención en (4.2). Para cada $x \in S$ encontremos $k$ suficientemente grande tal que

$$-k \leqslant x \leqslant k \quad \text{y} \quad 1/2^k < \delta(x). \tag{4.3}$$

Si $x$ cae en alguno de los intervalos seleccionados antes del $k$-ésimo paso, la prueba está completa. Entonces supongamos lo contrario. Existe un intervalo de la forma $[m2^{-k},(m+1)2^{-k}]$ que contiene a $x$. Pero por (4.3), debemos tener

$$\left[\frac{m}{2^k},\frac{m+1}{2^k}\right]\subset(x-\delta(x),x+\delta(x)).$$

Por tanto el intervalo $[m2^{-k},(m+1)2^{-k}]$ es uno de los $K_j$ en el $k-$ésimo paso. $\square$

**Teorema 4.6.** *Si $f\in\mathcal{HK}([a,b])$ y $F$ es una integral indefinida de $f$, entonces existe un conjunto nulo $E\subset[a,b]$ tal que $F'(x)=f(x)$ para toda $x\in[a,b]\backslash E$; esto es, $F$ es una $d-$primitiva de $f$ sobre $[a,b]$.*

*Demostración.* Para $\mu>0$, sea $E_\mu$ el conjunto de todas las $x\in(a,b)$ con la propiedad de que toda vecindad de $x$ contiene un intervalo $[u,v]$ tal que $x\in(u,v)$ y

$$\left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-f(x)\right|>\mu. \tag{4.4}$$

Sea $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{1/n}$. Supongamos que $x\notin E$. Entonces, para toda $n\geqslant 1$ hay una vecindad $V_n$ de $x$ tal que para algún intervalo $[u,v]\subset V_n$ con $x\in(u,v)$ tenemos que

$$\left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u}-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{n}.$$

Por la continuidad de $F$, la desigualdad arriba se preserva si reemplazamos $u$ por $x$. Entonces, hemos probado que si $x\notin E$, $F$ es diferenciable en $x$ y $F'(x)=f(x)$.

Es suficiente mostrar que $E_\mu$ es nulo para cada $\mu$, ya que entonces $E$ también es un conjunto nulo. Si $E_\mu=\emptyset$ no hay nada que probar. Entonces supongamos que $E_\mu\neq\emptyset$. Fijemos $\epsilon>0$. Como $f$ es HK integrable, por el Lema de Henstock existe una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a,b]$ tal que

$$\sum_{(I,x)\in\pi}|\Delta F(I)-f(x)\ell(I)|<\frac{\epsilon\mu}{6},\quad \text{para toda subpartición}\,\pi\subset\beta. \tag{4.5}$$

Para cada $x\in E_\mu$ escogemos un intervalo $[u_x,v_x]$ tal que $([u_x,v_x],x)\in\beta$ y (4.4) se verifica.

Definimos ahora la función $\delta_1 : E_\mu \to (0,\infty)$ con la propiedad de que

$$[x-\delta_1(x), x+\delta_1(x)] \subset (u_x, v_x).$$

Por el Lema 4.5 existe una familia numerable de intervalos cerrados y disjuntos $\{K_n\}$ tales que para cada $K_n$ existe $x_n \in E_\mu$ con

$$K_n \subset (x_n - \delta_1(x_n), x_n + \delta_1(x_n)) \subset (u_x, v_x), \quad \text{y} \quad E_\mu \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{4.6}$$

Sea $M = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n) \leqslant b-a$. Deseamos probar que $M < \epsilon$, con lo cual concluiríamos el teorema. Tomemos $N$ tal que $M < 2\sum_{n=1}^{N} \ell(K_n)$.

Del conjunto $\mathcal{F} = \{[u_{x_i}, v_{x_i}] : i = 1, 2, \ldots, N\}$ encontremos, usando el Lema de Austin, una colección disjunta $\{[u_{x_j}, v_{x_j}] : j = 1, 2, \ldots, m\} \subset \mathcal{F}$ tal que

$$\frac{1}{3}\ell\left(\bigcup_{i=1}^{N}[u_{x_i}, v_{x_i}]\right) \leqslant \ell\left(\bigcup_{j=1}^{m}[u_{x_j}, v_{x_j}]\right).$$

Por tanto obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}(v_{x_j} - u_{x_j}) = \ell\left(\bigcup_{j=1}^{m}[u_{x_j}, v_{x_j}]\right) &\geqslant \frac{1}{3}\ell\left(\bigcup_{i=1}^{N}[u_{x_i}, v_{x_i}]\right) \\ &\geqslant \frac{1}{3}\ell\left(\bigcup_{i=1}^{N} K_i\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N}\ell(K_i) > \frac{M}{6}.\end{aligned}$$

La colección $\pi = \{([u_{x_j}, v_{x_j}], x_j) : j = 1, 2, \ldots, m\}\}$ es una subpartición contenida en $\beta$ y luego, por las desigualdades (4.4) y (4.5), tenemos que

$$\mu\sum_{j=1}^{m}(v_{x_j} - u_{x_i}) < \sum_{([u_{x_j}, v_{x_j}], x_j)} |F(v_{x_j}) - F(u_{x_j}) - f(x_j)(v_{x_j} - u_{x_j})| < \frac{\epsilon\mu}{6}.$$

Finalmente, por las últimas dos cadenas de desigualdades tenemos

$$\frac{M}{6} < \sum_{j=1}^{m}(v_{x_j} - u_{x_i}) < \frac{\epsilon}{6}.$$

Por lo tanto $M < \epsilon$, como queríamos demostrar. $\square$

**Observación:** Este teorema también se verifica para las integrales de Riemann y de Lebesgue.

Una pregunta interesante surge en este punto: si $f \in \mathcal{HK}([a,b])$, ¿podemos tener una integral indefinida $F$ de $f$ que sea una $n-$ primitiva de $f$ sobre $[a,b]$? El teorema que acabamos de probar muestra que una función HK integrable siempre tiene una $d-$primitiva, sin embargo, en el ejemplo siguiente mostraremos que no siempre tiene una $n-$primitiva.

**Ejemplo 4.7.** Sea nuevamente $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Considere la función indicadora $f := \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ definida sobre $[0,1]$. Como $\mathcal{C}$ es un conjunto nulo, entonces la Proposición 1.59 asegura que $f \in \mathcal{HK}([0,1])$ y por tanto

$$F(x) = \int_0^x f = 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

Entonces $F'(x) = 0$ para toda $x \in [0,1]$. Pero $f(x) = 1$ para toda $x \in \mathcal{C}$, por lo que $F'(x) = f(x)$ casi en todas partes. Si $G$ fuera una integral indefinida que es $n-$primitiva de $f$, entonces $G(x) - G(0) = F(x)$, de manera que $G'(x) = 0$ para toda $x \in [0,1]$. Pero al ser $n-$primitiva tendríamos que $0 = G'(x) \neq f(x)$ sólo sobre un conjunto numerable, lo cual es una contradicción ya que $f(x) = 1$ en un conjunto no numerable.

El siguiente resultado asegura que una integral indefinida de una función regulada siempre es una $n-$primitiva. Dado que la clase de las funciones reguladas es bastante incluyente (contiene a las funciones continuas y a las monótonas), se trata de un resultado importante.

**Proposición 4.8.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función regulada. Entonces cualquier integral indefinida $F$ es una $n$-primitiva de $f$.*

*Demostración.* Por la Proposición 1.53, $f \in \mathcal{HK}([a,b])$. Luego, por la Proposición 1.55, el conjunto de puntos de discontinuidad $D \subset [a,b]$ de $f$ es un conjunto numerable. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b]\backslash D$. Por lo tanto, $F$ es una $n-$primitiva de $f$. $\square$

## 4.3. Caracterización de la HK-integral

En esta sección daremos una condición necesaria y suficiente para que una función $F$ sea una integral indefinida de una función $f \in \mathcal{HK}([a,b])$.

**Definición 4.9.** Sea $Z \subset [a,b]$ un conjunto arbitrario y sea $\gamma : Z \to (0,\infty)$. Decimos que la subpartición etiquetada $\pi = \{(I_j, t_j)\}$ de $[a,b]$ es $\gamma-$fina si todas sus etiquetas $t_j \in Z$ e $I_j \subset [t_j - \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)]$ para cada $j$.

**Definición 4.10.** Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de *variación casi nula* [1] *sobre* $Z \subset [a,b]$ y escribimos $F \in NV(Z)$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\gamma : Z \to (0,\infty)$ tal que si $\pi = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es $\gamma-$fina entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |F(v_i) - F(u_i)| \leqslant \epsilon.$$

**Teorema 4.11.** *(Caracterización de la HK-integral)*

*Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una integral indefinida de una función $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ si y sólo si existe un conjunto nulo $Z \subset [a,b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b] \backslash Z$ y $F \in NV(Z)$. En este caso,*

$$\int_a^x f = F(x) - F(a), \qquad \forall\, x \in [a,b]. \tag{4.7}$$

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y $G(x) = \int_a^x f$. Por el TFC (Teorema 4.6), existe un conjunto nulo $Z \subset [a,b]$ tal que $G'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b] \backslash Z$.

Sea $f_1 := f \cdot \mathbf{1}_{[a,b]\backslash Z}$. Por la Proposición 1.60 la función $f_1$ es HK-integrable sobre $[a,b]$ y $G$ también es la integral indefinida de $f_1$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$ existe una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a,b]$ tal que si $\pi \subset \beta$ entonces

$$\left| S_\pi(f_1) - \int_a^b f_1 \right| < \epsilon/2.$$

[1] Este concepto se conoce en el idioma inglés como “negligible variation”, que traducido de manera directa diría “variación insignificante”.

Definamos la función $\gamma : Z \to (0, \infty)$ como $\gamma(x) = \delta_x$, donde $\delta_x > 0$ es la correspondiente a $x$ en la definición de la cubierta $\beta$.

Sea $\pi_0 = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i=1}^n$ una subpartición $\gamma-$fina de $[a, b]$. Es decir, $[u_i, v_i] \subset (t_i - \delta_{t_i}, t_i + \delta_{t_i})$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $\pi_0$ también es una subpartición en $\beta$, de manera que el Lema de Henstock implica que

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f_1(t_i)(v_i - u_i) - \int_{u_i}^{v_i} f_1 \right| < \epsilon.$$

Pero como $f_1(t_i) = 0$ ya que cada $t_i \in Z$, y también $\int_{u_i}^{v_i} f_1 = G(v_i) - G(u_i)$, entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |G(v_i) - G(u_i)| < \epsilon.$$

Como $\pi_0$ es una subpartición $\gamma-$fina arbitraria, concluimos que $G \in NV(Z)$. Ahora si $F$ es una integral indefinida de $f$, entonces $F = G + F(a)$. Como $F(v_i) - F(u_i) = G(v_i) - G(u_i)$ entonces también $G \in NV(Z)$. Finalmente la ecuación (4.7) se verifica para $F$.

($\Leftarrow$) Sea $Z \subset [a, b]$ el conjunto nulo donde $F'$ no existe o es distinta de $f$ y supongamos que $F \in NV(Z)$. Esta parte de la prueba es muy parecida a la dada en el Teorema 4.1, la única diferencia es que ahora definimos a la cubierta $\beta_1$ usando la propiedad de que $F \in NV(Z)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(t) = 0$ para toda $t \in Z$ usando la Proposición 1.60.

Sea $\epsilon > 0$. Sea $\gamma : Z \to (0, \infty)$ la correspondiente a la $\epsilon > 0$ por la definición de $F \in NV(Z)$ y $\delta_t$ la del Lema 1.66. Definimos las cubiertas $\beta_1$ y $\beta_2$ como sigue

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \{(I, t) : t \in Z,\, t \in I \subset [a, b],\, \ell(I) < \gamma(t)\},\\
\beta_2 &= \{(I, t) : t \in I \backslash Z,\, t \in I \subset [a, b],\, \ell(I) < \delta_t\}.
\end{aligned}$$

Entonces $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ es una cubierta de Cousin de $[a, b]$.

Sea $\pi = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i=1}^n$ una partición contenida en $\beta$, entonces

$$\begin{aligned}
|F(b) - F(a) - S_\pi(f)| &= \left|\sum_{i=1}^n [F(v_i) - F(u_i) - f(t_i)(v_i - u_i)]\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n |F(v_i) - F(u_i) - f(t_i)(v_i - u_i)| \\
&\leqslant \sum_{t_i \in Z} |F(v_i) - F(u_i)| \\
&\qquad + \sum_{t_i \in [a,b]\setminus Z} |F(v_i) - F(u_i) - f(t_i)(v_i - u_i)| \\
&\leqslant \epsilon + \sum_{t_i \in [a,b]\setminus Z} \epsilon(v_i - u_i) \leqslant \epsilon(1 + b - a).
\end{aligned}$$

Entonces $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ y su integral es $F(b) - F(a)$. □

Podemos realizar varias observaciones interesantes a partir del Teorema de Caracterización de la HK-integral con relación a la parte del Teorema Fundamental del Cálculo formulado en el Teorema 4.1.

Es fácil verificar que si $F$ es continua en un conjunto numerable $S$ entonces $F$ automáticamente es de variación casi nula sobre $S$, $F \in NV(S)$. La idea no es más que la prueba en el Teorema 4.1: sea $\epsilon > 0$ y supongamos que $S = \{c_1, c_2, \ldots\}$; por la continuidad de $F$ en $S$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un $\delta_k > 0$ tal que si $c_k \in [u, v]$ con $v - u < \delta_k$ entonces

$$|F(v) - F(u)| < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Definimos la función $\gamma : S \to (0, \infty)$ como $\gamma(c_k) = \delta_k$.

Si $\pi = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es $\gamma-$fina entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^n |F(v_i) - F(u_i)| \leqslant \sum_{i=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon,$$

concluyendo que efectivamente $F \in NV(S)$ cuando $F$ es continua sobre $S$, un conjunto numerable. En este caso, si $F$ es una $n-$primitiva de $f$ donde el conjunto de excepciones es $S$, como consecuencia del Teorema de Caracterización $f$ es HK-integrable y $F$ es una integral indefinida de $f$.

Otra observación que podemos hacer, es con relación al Ejemplo 4.3, en el cual mostramos que si una función $F$ es una $d-$primitiva de otra, no necesariamente podemos concluir que $F$ sea una integral indefinida. Del contraejemplo que dimos, resulta que la función de Cantor-Lebesgue $H$ no es de variación casi nula sobre el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$. De suponer que $H \in NV(\mathcal{C})$, tendríamos que $H$ es una integral indefinida de la función constante cero, lo cual probamos que es falso.

### 4.3.1. Caracterización de la integral de Lebesgue

Como prometimos al lector al final del Capítulo 2, mostraremos que la clase de funciones Lebesgue integrales (de la cual suponemos que el lector tiene conocimiento) es equivalente a la clase de funciones absolutamente integrales.

En el Teorema 2.30 se presentó la prueba de que la integral indefinida de toda función $f \in \mathcal{HK}(I)$ siempre es absolutamente continua sobre $I$. De la teoría de integración de Lebesgue, como podemos verificar en textos como Royden [4], recordemos que una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[a, b]$ si y sólo si ésta es diferenciable casi dondequiera, su derivada $f$ es Lebesgue integrable en $[a, b]$ y, para cada $x \in [a, b]$,

$$F(x) = F(a) + \mathcal{L}\int_a^x f.$$

*En otras palabras, $f$ es Lebesgue integrable sobre $I$ y $F$ una integral indefinida de $f$ si y sólo si $F \in AC(I)$ y $F$ es una $d-$primitiva de $f$.*

El siguiente resultado es el puente que necesitamos para probar la equivalencia de lo que comentamos arriba.

**Lema 4.12.** *Si $F \in AC([a,b])$ y $Z \subset [a,b]$ es nulo, entonces $F \in NV(Z)$.*

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$. Por continuidad absoluta de $F$, sea $\eta > 0$ tal que si $\{I_i\}_{i=1}^n$ es una subpartición de $[a,b]$ con $\sum_{i=1}^n \ell(I_i) < \eta$ entonces $\sum_{i=1}^n |\Delta F(I_i)| < \epsilon$.

Como $Z$ es nulo, para $\eta > 0$ existe una colección de intervalos abiertos $\{J_i\}_{i=1}^\infty$ tal que

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^\infty J_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^\infty \ell(J_i) < \eta.$$

Para $t \in Z$, sea $k(t)$ el índice más pequeño tal que $t \in J_{k(t)}$ y sea $\gamma(t) > 0$ tal que $[t-\gamma(t), t+\gamma(t)] \subset J_{k(t)}$.

Hemos definido una función $\gamma : Z \to (0,\infty)$, de tal forma que si

$$\pi = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i=1}^m$$

es $\gamma-$fina, entonces

$$[u_i, v_i] \subset [t_i - \gamma(t_i), t_i + \gamma(t_i)] \subset J_{k(t_i)}.$$

Como los intervalos $[u_i, v_i]$ son disjuntos, la longitud total de ellos es $\leqslant \eta$ y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^m |F(v_i) - F(u_i)| < \epsilon.$$

Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $F \in NV(Z)$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la condición de continuidad absoluta no puede omitirse.

**Ejemplo 4.13.** Sea $F(x) = x^2 \cos(\pi/x^2)$ para $x \in (0,1]$ y $F(0) = 0$. Hemos visto que $F \notin AC([0,1])$. Ahora, considere el conjunto $\{0\}$. Probaremos que $F \notin NV(\{0\})$.

Sea $0 < \epsilon < 1$. Sea entonces $\delta(0) = \epsilon$, de manera que si $I = [0, v] \subset [-\delta(0), \delta(0)]$ entonces

$$|F(v) - F(0)| = |F(v)| = |v^2 \cos(\pi/v^2)| \leqslant |v^2| < \epsilon.$$

Entonces $F$ es una función de variación casi nula en un conjunto nulo (en $\{0\}$) pero tal que $F \notin AC([0,1])$, mostrando que el recíproco en el Lema 4.12 no es cierto.

Ahora ya estamos en condiciones de obtener una importante caracterización de las funciones absolutamente integrables, en la que relaciona ésta clase con la clase de funciones Lebesgue integrables.

**Teorema 4.14.** *Una función $f \in \mathcal{HK}(I)$ es absolutamente integrable sobre $I$ si y sólo si existe una función $F \in AC(I)$ tal que $F$ es una $d-$primitiva de $f$.*

*Demostración.* Supongamos que $f \in \mathcal{L}(I)$ y sea $F(x) = \mathcal{HK}\int_a^x f$. El Teorema 2.30 implica que $F \in AC(I)$ y el Teorema 4.6 que $F$ es una $d-$primitiva de $f$ sobre $[a, b]$.

Recíprocamente, si $F \in AC(I)$ y $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]\backslash Z$ donde $Z$ es nulo, entonces el Lema 4.12 implica que $F \in NV(Z)$ y por tanto el Teorema de Caracterización de la HK-integral implica que $f \in \mathcal{HK}(I)$ y que $F$ es una integral indefinida de $f$. Como $F \in AC(I)$, entonces el Teorema 2.30 nos asegura que $f$ es absolutamente integrable sobre $[a, b]$. $\square$

El siguiente corolario es inmediato.

**Corolario 4.15.** *Sea $f \in \mathcal{HK}(I)$. Entonces $f$ es Lebesgue integrable sobre $I$ si y sólo si $f \in \mathcal{L}(I)$.*

Más aún, a partir del corolario anterior es claro que la clase de las Lebesgue integrables es una subclase propia de las Henstock-Kurzweil integrables ya que la HK-integral no es una integral absoluta.

### 4.3.2. Continuidad absoluta generalizada

En la Observación 1.22 comentamos que, en cierto sentido, la HK integral es una extensión numerable de la integral de Riemann. En esta sección veremos una caracterización descriptiva de la integral de Henstock y Kurzweil en la cual la integral indefinida de una función HK integrable pertenece a una clase que *extiende* la noción de continuidad absoluta, en el sentido que explicamos a continuación.

**Ejemplo 4.16.** La función $f(x) = x^2 \cos(\pi/x^2)$ para $x \in (0,1]$ y $f(0) = 0$ no es de variación acotada (ver Ejemplo 2.19) y por tanto tampoco es absolutamente continua en $[0,1]$. Sin embargo, $f$ es absolutamente continua sobre cada subintervalo $[1/(k+1), 1/k]$ para $k \in \mathbb{N}$.

**Definición 4.17.** Sea $E \subset [a,b]$. Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertenece a la clase $AC^*(E)$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que si $\{[u_i, v_i]\}_{i=1}^n$ es una subpartición de $[a,b]$ con la propiedad de que $u_i$ o $v_i$ está en $E$ y $\sum_{i=1}^n (v_i - u_i) < \eta$, entonces

$$\sum_{i=1}^n |F(v_i) - F(u_i)| < \epsilon.$$

Si la condición se satisface con $u$ y $v$ están en $E$, decimos que $F \in AC(E)$.

Las clases $AC^*(E)$ y $AC(E)$ aparentemente son muy parecidas, sin embargo, el significado de los conceptos es muy distinto para ciertas funciones.

**Ejemplo 4.18.** Si $E := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $F := \mathbf{1}_E$ es la función indicadora de $E$, entonces $F$ es absolutamente continua sobre $E$ ya que los extremos de cualquier subpartición $\{[u,v]\}$ de $E$ son racionales y por tanto la suma $\sum |F(v) - F(u)| = 0$. Por otro lado, $F$ no pertenece a la clase $AC^*(E)$ ya que siempre podemos escoger una partición donde los subintervalos tienen un extremo racional y otro irracional, obteniendo $\sum |F(v) - F(u)| \geqslant 1$.

Similarmente, generalizamos la clase de las funciones de variación acotada como sigue.

**Definición 4.19.** Sea $E \subset [a,b]$. Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertenece a la clase $BV^*(E)$ si

$$\sup \sum_{[u,v]\in\pi} |F(v) - F(u)| < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las subparticiones $\pi$ de $[a,b]$ con $u$ o $v$ en $E$.

Si la condición se satisface con $u$ y $v$ en $E$, decimos que $F \in BV(E)$.

El siguiente resultado es el análogo de la Proposición 2.27. Lo enunciamos sin prueba y remitimos al lector a [1] para una demostración detallada.

**Proposición 4.20.** *Si $f$ es HK integrable sobre $[a,b]$ y su integral indefinida $F \in BV^*(E)$ donde $E \subset [a,b]$, entonces $F \in AC^*(E)$.*

En lo que sigue, realizamos una extensión numerable de las clases $AC^*$ y $BV^*$ para probar el teorema de caracterización de la HK integral.

**Definición 4.21.** Sea $E \subset [a,b]$. Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertenece a la clase $ACG^*(E)$ si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, tal que $F \in AC^*(E_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Un hecho interesante con relación a la clase $ACG^*(E)$ es que toda función diferenciable sobre $E$ pertenece a ella.

**Ejemplo 4.22.** Sea $F$ diferenciable sobre $[a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $E_n$ al conjunto

$$E_n = \{x \in [a,b] \,:\, |F'(t)| \leqslant n,\ |x-t| \leqslant 1/n\}.$$

Si $x \in E_n$ significa que $F$ satisface la condición de Lipschitz sobre el intervalo $(x-1/n, x+1/n)$, esto es,

$$|F(x) - F(t)| \leqslant n|x-t|$$

siempre que $|x-t| \leqslant 1/n$. Cada $x \in [a,b]$ pertenece a $E_n$ para alguna $n$ y entonces $[a,b]$ es la unión de los $E_n$.

Para $n$ fija, dado $\epsilon > 0$ escogemos $\eta > 0$ tal que $\eta < 1/n$ y $n\,\eta < \epsilon$.

Si $\pi = \{[u_i, v_i]\}_{i=1}^m$ es una subpartición de $[a,b]$ con $u_i$ o $v_i$ en $E_n$ para cada $i$ que satisface $\sum_{i=1}^m (v_i - u_i) < \eta$, entonces $v_i - u_i < 1/n$ y por tanto $|F(v_i) - F(u_i)| \leqslant n(v_i - u_i)$ para cada $i$. Sumando sobre todas las $i$ obtenemos

$$\sum_{\pi} |F(v_i) - F(u_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} n(v_i - u_i) < n\,\eta < \epsilon.$$

Esto es, $F \in AC^*(E_n)$. Como $n$ es arbitraria, concluimos que $F \in ACG^*([a,b])$.

**Definición 4.23.** Sea $E \subset [a,b]$. Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertenece a la clase $BVG^*(E)$ si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, tal que $F \in BV^*(E_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

En el Capítulo 2 probamos que si una función $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ es absolutamente integrable, entonces su integral indefinida es de variación acotada sobre $[a,b]$. En el siguiente resultado veremos que la hipótesis de integrabilidad absoluta es innecesaria para concluir que la integral indefinida está en la clase $BVG^*([a,b])$.

**Proposición 4.24.** *Si $f$ es HK integrable sobre $[a,b]$, entonces su integral indefinida está en $BVG^*([a,b])$.*

*Demostración.* Sea $F$ la integral indefinida de $f$. Por el Lema de Henstock, dado $\epsilon > 0$ existe una cubierta de Cousin $\beta$ de $[a,b]$ tal que

$$\sum_{\pi} |f(t)\ell(I) - \Delta F([u,v])| < \epsilon, \tag{4.8}$$

para cada subpartición $\pi = \{([u,v],t)\}$ contenida en $\beta$.

Denotemos por $E_n$ al conjunto

$$E_n = \{x \in [a,b] \,:\, |f(x)| \leqslant n,\ \delta_x > 1/n\}, \tag{4.9}$$

donde $\delta_x > 0$ es la correspondiente a $x$ en la definición de la cubierta $\beta$.

Ahora partimos $E_n$ en los conjuntos $E_{n\,k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, tal que la medida de cada $E_{n\,k}$ es menor que $1/n$. Los conjuntos $E_{n\,k}$ satisfacen que $x \in E_{n\,k}$, $y \in E_{n\,(k+i)}$ implica $x < y$.

Fijemos $n$ y $k$. Sea $\pi = \{[u_i, v_i]\}_{i=1}^m$ una subpartición de $[a, b]$ tal que $u_i$ o $v_i$ está en $E_{n\,k}$ para cada $i$. Agregamos etiquetas $t_i \in E_{n\,k}$ a cada subintervalo. Como la medida de $E_{n\,k}$ es menor que $1/n$, entonces $v_j - u_j < 1/n$ para cada $j = 2, \ldots, m-1$. Note que no podemos asegurar lo mismo para los subintervalos $[u_1, v_1]$ y $[u_m, v_m]$.

Consideremos $\pi_1 = \{([u_1, v_1], t_1), ([u_m, v_m], t_m)\}$ y $\pi_2$ consiste del resto de los elementos en $\pi$. Como $F$ es continua, existe $M$ tal que $|F(x)| \leqslant M$ para cada $x \in [a, b]$. También, dado que $x \in E_{n\,k}$ implica $\delta_x > 1/n$, entonces $[u_j, v_j] \subset (t_j - \delta_{t_j}, t_j + \delta(t_j))$ y por tanto $\pi_2 \subset \beta$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} |F(v_i) - F(u_i)| &\leqslant \sum_{\pi_2} |F(v) - F(u) - f(t)(v-u)| + \sum_{\pi_2} |f(t)|(v-u) \\ &\quad + \sum_{\pi_1} |F(v) - F(u)| \\ &\leqslant \epsilon + n(b-a) + 4M\end{aligned}$$

Como $n$ es fija, concluimos que $F \in BV^*(E_{n\,k})$. De aquí se sigue que $F \in BVG^*([a, b])$. $\square$

**Corolario 4.25.** *Si $f$ es HK integrable sobre $[a, b]$ y $F$ su integral indefinida, entonces $F \in ACG^*([a, b])$.*

*Demostración.* Sean $E_n \subset [a, b]$ tales que $[a, b] = \bigcup_n E_n$ y $F \in BV^*(E_n)$ para cada $n$. Por la Proposición 4.20, tenemos que $F \in AC^*(E_n)$. Por tanto $F \in ACG^*([a, b])$. $\square$

Antes de probar el principal resultado de esta sección necesitamos un nuevo concepto que involucra el de variación casi nula.

**Definición 4.26.** Una función real $F$ satisface la *condición fuerte de Luzin sobre un conjunto* $S \subset \mathbb{R}$ ($F$ es $SL$ sobre $S$), si para cada conjunto $Z \subset S$ nulo y cada $\epsilon > 0$, existe una función $\gamma : Z \to (0, \infty)$ tal que si $\pi = \{([u, v], t)\}$ es $\gamma-$fina, entonces

$$\sum_{\pi} |F(v) - F(u)| < \epsilon.$$

En otras palabras, una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es $SL$ sobre $S \subset [a, b]$ si para cada subconjunto $Z \subset S$ nulo tenemos $F \in NV(Z)$ (recuerde la Definición 4.9). Reformulando el Lema 4.12, si $F$ es absolutamente continua entonces $F$ es $SL$. A continuación veremos una generalización de este hecho a una clase más amplia que $AC([a, b])$.

**Lema 4.27.** *Si* $F \in ACG^*([a, b])$ *entonces* $F$ *es* $SL$ *sobre* $[a, b]$.

*Demostración.* Existen conjuntos $E_n \subset [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, tales que

$$[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \qquad \text{y} \qquad F \in AC^*(E_n).$$

Es claro que $AC^*$ implica $AC$, por tanto $F \in AC(E_n)$ para cada $n$. Podemos reformular el Lema 4.12 con $AC(E_n)$ en lugar de $AC([a, b])$, obteniendo que $F$ es $SL$ sobre $E_n$ para cada $n$.

Ahora bien, si $Z \subset [a, b]$ es nulo, entonces $F_n = Z \cap E_n$ es nulo para cada $n$. Dado que $F$ es $SL$ sobre $E_n$, existe $\gamma_n : F_n \to (0, \infty)$ tal que si $\bar{\pi}$ es $\gamma_n-$fina, entonces

$$\sum_{\bar{\pi}} |F(v) - F(u)| < \epsilon/2^n.$$

Para cada $x \in Z$, sea $n_x := \min\{n \in \mathbb{N} : x \in F_n\}$. Definimos la función $\gamma : Z \to (0, \infty)$ como

$$\gamma(x) := \gamma_{n_x}(x).$$

Sea $\pi$ una subpartición de $[a, b]$ $\gamma-$fina. Para cada $n$, $\pi_n$ consiste de los elementos en $\pi$ donde la etiqueta $t$ satisface $n_t = n$ y entonces $\pi_n$ es $\gamma_n-$fina.

Por lo tanto

$$\sum_{\pi} |F(v) - F(u)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\pi_n} |F(v) - F(u)| \leqslant \epsilon,$$

como queríamos probar. $\square$

Finalemente, estamos listos para mostrar la caracterización de la HK integral usando la clase $ACG^*$.

**Teorema 4.28.** *Una función* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una integral indefinida de una función* $f \in \mathcal{HK}[a, b]$ *si y sólo si* $F \in ACG^*([a, b])$ *es tal que* $F'(x) = f(x)$ *casi dondequiera sobre* $[a, b]$.

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([a, b])$. Por el Corolario 4.25 tenemos que la integral indefinida $F \in ACG^*([a, b])$ y el Teorema 4.6 implica que $F'(x) = f(x)$ c.d. sobre $[a, b]$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $F \in ACG^*([a, b])$ y $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b] \backslash Z$, donde $Z$ es nulo. Por el Lema 4.27 tenemos que $F$ es $SL$ sobre $[a, b]$. Por tanto, el Teorema de caracterización 4.11 nos da la conclusión. $\square$

# Comentarios finales

La conclusión inmediata de este trabajo es que la integral de Henstock y Kurzweil recupera la idea original de Newton y lo hace mediante una reformulación de la integral de Riemann obteniendo una integral más potente que la integral de Lebesgue. A través del Capítulo 1 vimos que posee todas las propiedades básicas de una integral, como linealidad, positividad, monotonía, etc. En el Capítulo 2 mostramos que la subclase de las funciones absolutamente integrables posee las mismas características descriptivas de la integral de Lebesgue y probamos posteriormente que estas clases coinciden. Incluimos a continuación un diagrama que muestra la relación entre algunas integrales.

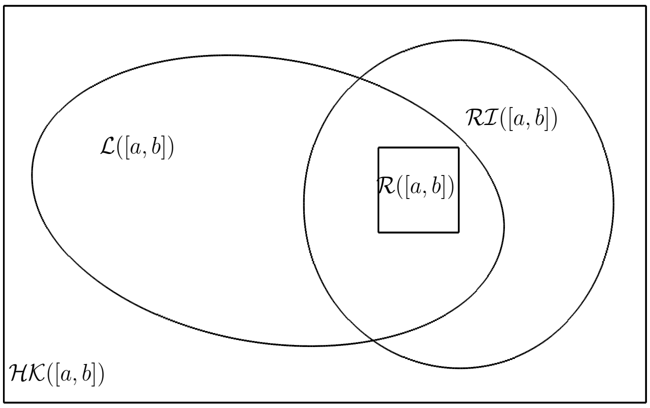


Figura 4.1: Relación de la HK integral con otras integrales

Una función que está en $\mathcal{L}$ pero no en $\mathcal{RI}$ es la función de Dirichltet del Ejemplo 1.6. Mientras que una función en $\mathcal{RI}$ que no es Lebesgue integrable es proporcionado por la función $F(x) = x^2 \cos(1/x^2)$ del Ejemplo 1.69. Un ejemplo de una función en $\mathcal{HK}$ pero no en $\mathcal{L} \cup \mathcal{RI}$ se puede construir a partir de la derivada de la función anterior $F'$, modificándola con $F'(x) = 0$ en los racionales. Con esto $F'$ permanece en $\mathcal{HK}$, pero pierde su permanencia en la clase $\mathcal{RI}$ dado que es discontinua en un conjunto de medida positiva.

En el Capítulo 3 presentamos los principales teoremas de convergencia para la HK integral, mostrando que los eficientes resultados relativos a convergencia e intercambio de los procesos de límite e integración también son válidos en este contexto. Concluimos la tesis dando una caracterización de la HK integral.

Una ventaja de esta presentación es que resume y ordena los principales resultados de esta teoría de integración. Hay pocas referencias del tema ya que no es una teoría muy conocida, y en algunas de ellas se trata a la HK integral con relación a otras integrales, como es el caso del libro de Gordon [5]. Aún en los libros cuyo tema principal es la HK integral, usualmente se mezclan resultados de otras teorías relacionadas. Tal es el caso del libro de Výborný y Peng Yee [1], en el cual se realiza un tratamiento de *la SL integral* e implícitamente de la integral de Denjoy en el tema de continuidad absoluta generalizada. En la tesis intentamos centrar todos los resultados para la HK integral y partiendo de ellos obtener algunos relacionados con teorías conocidas como la de Riemann y Lebesgue.

Otra ventaja es que no hay literatura en español relativo a esta teoría de integración, de manera que podría servir como referencia al tema en este lenguaje.

Algunos de los resultados expuestos aquí son recientemente publicados, tales como el artículo de Brian Thomson [12] que fue la base para desarrollar la teoría en el marco de relaciones de cobertura, y el artículo de Výborný [10] en el cual propone una reformulación de la definición de HK integrabilidad, como lo exponemos en la Sección 2.1.2.

Es posible extender la definición de HK integrabilidad a intervalos no acotados. Una buena referencia es el libro de Robert Bartle [2], el cual dedica la segunda parte de su libro a la exposición de resultados para funciones definidas sobre intervalos no acotados.

Hay algunos problemas abiertos. En la carta disponible en [13] se pregunta acerca de la topología del *espacio de Denjoy*, el cual consiste en todas las funciones HK integrables. Se comenta que se han propuesto muchas topologías para este espacio de funciones, pero ninguna de ellas satisface suficientes propiedades para llamarla *una topología natural*. Un avance relacionado con esta investigación se puede consultar en el texto de Jaroslav Kurzweil [6].

# Bibliografía


[1] Výborný, R., y Peng Yee, L., *The integral: an easy approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[2] Bartle, R., *A modern theory of integration*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[3] Bartle, R., y Sherbert, *Introduction to real analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Tercera Edición, 2000.

[4] Royden, *Real Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Tercera Edición, 1988.

[5] Gordon, R. A., *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 4, American Mathematical Society, Providence, 1994.

[6] Kurzweil J., *Henstock-Kurzweil Integration: Its Relation to Topological Vector Spaces*, World Scientific Pub Co., 2000.

[7] DePree, J. D., y Swartz, C. W., *Introduction to real analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

[8] Chapman Pugh, C., *Real mathematical analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2002.

[9] Bartle, R., *Return to the Riemann integral*, American Mathematical Monthly 103, Octubre 1996, p. 625-632.

[10] Výborný, R., *A remark on the definition of the Kurzweil-Henstock integral*, Real Analysis Exchange, Vol. 31(2), 2005/2006, p. 465-468.

[11] Gong, Z., *A new descriptive characterization of Henstock-Kurzweil integrals*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics (2003) 27, p.445-450.

[12] Thomson, B., *Rethinking the elementary real analysis course*, American Mathematical Montly 114, Junio-Julio 2007, p. 469-490.

[13] Schechter E., *An introduction to the Gauge integral*, disponible en http://www.math.vanderbilt.edu/ schectex/ccc/gauge/

[14] Smithee, A., *The fundamental program of calculus*, disponible en http://classicalrealanalysis.com/smitheems.aspx